まえがき

本書では，平面代数曲線を題材にして，代数幾何学の入口を覗いてみようと思う．代数幾何学というのは，多変数の連立代数方程式の解として定まる図形の性質を研究する数学の一分野である．したがって本来は幾何学なのだが，代数方程式を扱う関係上，代数的な手法を多用することになるから，日本では代数学に分類されている．

中学校や高等学校で習う直線や放物線，楕円，双曲線などの 2 次曲線（円錐曲線）は，代数幾何学の研究対象である．なぜなら，これらはみな多項式で定まるからである．本書の読者ならば「直線 $y = 2x + 5$」や「放物線 $y = 3x^2 + 2x + 1$」という言い回しに違和感を覚えないだろう．わが国の充実した学校教育のおかげで，図形とそれを定義する方程式の一体化というデカルト (Descartes) 以来の精神が確実に継承され，浸透しているのである．曲線どうしの交点を求めるときには，連立方程式を解いた．これは，まさしく，幾何学と代数学の融合した姿であろう．このように，代数幾何学の考え方は，大学入学以前に慣れ親しんだ解析幾何を通して身についているはずなのだ．しかし，現代では概念の抽象化が著しく進んでいるため，改めて勉強しようと思ってもなかなか敷居が高い．初学者が一足飛びに現代的な定式化で学ぼうとしても，労多くして，ということになりかねない．そこで，さまざまな段階で理解を助けるためのガイドブックが必要になる．専門的な数学の知識をほとんどもたない読者に向けて，初歩からていねいに解説を試みる場合もあれば，ある程度高度な数学の素養を身につけた者や数学の研究者を目指す学生を対象として，最新の概念や手法をかみ砕いて解説する場合もあるだろう．本書は，どちらかといえば前者寄りだが，完全にそういうわけではない．読者には，大学の数学科で学部 2 年次までに習う程度の数学の知識と，それ以上に旺盛な知的好奇心を想定している．力量不足の言いわけになるが，ある程度面白くなるところまで読者を案内しようと思えば，それなりの要求をせざるを得ないのである．

本書の内容を概観しよう．第 0 章では，代数曲線を描くカンバスとして，複

素射影平面が適している理由を，可能な限り直感的に把握できるよう説明を試みる．すでに，複素射影平面に馴染みのある読者は第 0 章を飛ばして，第 1 章から読み始めるとよい．第 1 章では，第 0 章で素朴に扱った事柄の多くに，線形代数を用いて数学的な肉付けを行う．デザルグ (Desargues) の定理をはじめとする，直線と 2 次曲線が織りなす古典的な射影幾何学を楽しむこともできよう．この章は[10]から強い影響を受けている．ここまでで，直線や 2 次曲線が主役を務める部分は一段落するので，第 2 章では 3 次以上の曲線を扱うための準備を行う．接線や変曲点など馴染みのある概念がここで登場する．一番の難関は，2 つの曲線の次数と交点の個数との関係を述べるベズー (Bézout) の定理である．一見素朴な定理なのだが，交点での交わり具合を測る量（局所交点数）を適切に定めるためには，どうしても抽象的な代数学に頼らざるを得ない．ベズーの定理の証明自体は，比較的最近の記事[4]を参考にして，ユークリッド (Euclid) の互除法を用いる初等的な方針を採った．証明に興味がなければ，この部分は読み飛ばしても差し支えない．第 3 章と第 4 章は，それぞれ平面 3 次曲線と楕円関数に充てる．第 3 章では，非特異とは限らない既約な平面 3 次曲線を対象にして，直線との交点を用いた演算を導入して，その群としての構造を論じる．第 4 章では，非特異な 3 次曲線の群演算が，本を正せば複素数の加法に由来することを明らかにする．ここで敢えて複素解析学の範疇に入る一章を挿入したのは，代数幾何学の起源や手法が代数学に限定されるわけではないことを強調する狙いである．第 5 章では，平面代数曲線の微視的な特徴を捉えるために，解析的分枝に対してピュイズー (Puiseux) 級数を用いた媒介変数表示を導入する．これによって，平面曲線の正規化による特異点解消の様子が明らかになるし，局所交点数のベキ級数による解釈も可能になる．最後の第 6 章は，古典的なプリュッカー (Plücker) 公式の Viktor Kulikov による拡張版[7]に焦点を当てる．付随して，射影平面曲線のクレモナ変換による特異点の標準化，爆発（ブローアップ）による特異点解消，種数公式などにも触れる．最終目標は，一般の非特異 4 次曲線はちょうど 28 本の複接線をもつという古典的な結果を導出することにある．

本書と類似の意図で書かれた和書には，[16]，[10]，[12]などがある．いずれも個性豊かで優れた入門書であり，異なる切り口の解説を楽しむことが

できる．そういった中で，没個性にならぬように気をつけながら，本格的な対象を扱いつつも決して本格派ではない入門書を目指した．読者にほんの少しでも新たな楽しみを見出していただければ，望外の喜びである．

謝　辞

これは，大阪大学理学部での講義や奈良女子大学(2004 年 6 月)と埼玉大学(2011 年 12 月)で行った集中講義をもとに，いくつかの話題を付け加えて完成したものである．集中講義に招いて下さった武田好史さん，酒井文雄先生，岸本崇さんをはじめ，退屈な講義を毎日辛抱強く聴いてくれた学生諸君に，この場を借りて感謝申し上げる．

2016 年 10 月　　　　　　　　　　　　　　　　　　待兼山にて

今野 一宏