口　　上

2 次方程式の解法は高等学校までに習う．2 次式の判別式は，大学の入学試験では根と係数の関係[*1]にからんだ対称式の計算などと共に極めて重要な頻出事項とされている．しかし，大学で学ぶ数学では，それらを使う機会は滅多にない．不思議なくらいである．日々の進歩に遅れをとらないようにと，いろいろな事柄を習得済みとして先を急がねばならない事情はあるにせよ，これでは小学校で習った「帯分数」や「つるかめ算」などと同じで，何のために苦労して身につけたのかわからない．また，3 次方程式や 4 次方程式の解法に至っては，16 世紀の昔から根の公式が知られているにもかかわらず，21 世紀の現在でも正式に教わる機会はまずない．理学部数学科の学生ならば，代数学の講義で「ガロア理論」を習う際に，あるいは耳にするかもしれない．しかし，そのときにはもっと「洗練された」代数を勉強するのに精一杯で，残念ながらほとんど記憶に残らないであろう．また，5 次以上の代数方程式には根の公式が存在しないというルフィニ・アーベルの定理についても同様で，それだけを目標にするのなら，わざわざ大仕掛けの道具を振り回す必要などないのだけれど，どうして公式が不可能なのかを原理的にきちんと理解して卒業する学生はそんなに多くないように感じる．数学を教えて生計を立てている身としては，抽象的で難しい代数に振り回されて代数アレルギーを起こす前に，ぜひどこかでこのような事柄を学習してほしいと思うのだけれど．

本書は，大学初年の理系学生向けの一般教養科目で（複素数係数の）代数方程式の解法を講義するために準備したノートに基づいている．実際の講義では 2 次方程式から始めて，3 次方程式のいわゆる「カルダノの公式」や 4 次方程式のフェラーリの解法を紹介し，代数学の基本定理，5 次以上の代数方程式の代数的非可解性までを解説した．また，方程式の解法の歴史を辿りながら，数学（特に代数学）がどのように発展してきたかについても触れた．これは，本書の第 7 章までの内容から正 17 角形の作図やアーベルの補題など

[*1]　今は「解」の公式,「解」と係数の関係というふうに習うらしいが，ここでは伝統を重んじて「解」ではなく「根」という．

を取り除いた部分に相当する．その講義ノートに散見した誤りを修正しつつ，面白そうな話題をいくつか付け加えてできたのが本書である．読者としては大学初年の学生や意欲のある高校生を念頭において，時には厳密さを多少犠牲にしても，なるべく少ない予備知識で読めることを優先した．実際，数式はたくさん出て来てしまうけれども，数学に興味のある高校生だったら第 5 章くらいまではその大部分をきっと読みこなせるだろう．しかしそれ以降は少しだけ，例えば置換のことなど，高校では習わない知識が必要になる箇所がある．とはいえ，そんなに高級な事柄ではないから，第 1 の目標であるルフィニ・アーベルの定理の証明までは何とか辿り着けるのではないだろうか．ただし，複素数は既知であることを前提にしている．基本事項を付録 A にまとめたので，必要ならそれを参照すればよい．

方程式の話となると最後にガロアというスターを登場させて，ガロア理論の美しさを知らしめんとするのが慣例である．しかし，それには敢えて従わない．群論に立ち入った説明をある程度しなければならなくなるという技術的な理由がないわけではないが，第 1 の理由は全く個人的なことである．私はいわゆるスターが好きではないのだ．同じヒーローならばドン・キホーテのほうがよい．執筆しながら常に意識していたヒーローは，5 次方程式を解くべく膨大な計算を実行して結局解けなかった 17 世紀の数学者チルンハウスと，5 次方程式に根の公式がないことをおそらく人類史上最初に宣言したルフィニである．本書でいわゆる「アーベルの定理」（あるいは「アーベル・ルフィニの定理」）を敢えて「ルフィニ・アーベルの定理」と呼んでいるのは，正しくそういう理由からである．また，最終章で楕円関数を用いたエルミートの 5 次方程式の解法というハイレベルな内容に多少無理をして触れたのも，チルンハウス変換が陰で基本的な役割を果たしているからに他ならない．

高次方程式の代数的非可解性に関するより体系的な記述は参考文献として挙げた本（特に[5], [6]）にあるので，一読されることをお勧めする．[8] は書名の通り高等学校で習う程度の知識で読めるように工夫された良書である．[1] は歴史的な経過に詳しく，数が図形から開放される過程を生き生きとわかりやすく描いている．[5] は長く読み継がれている名著だが，今となってはちょっと難しいかもしれない．ルフィニ・アーベルの定理の初等的でわかりやすい解説を目指して，本書と同じような趣旨で書かれたものは世にたく

さん存在するに違いない．著者が気がついた中からは[2]を挙げるに留める．[6]は古バビロニアからガロアに至る代数方程式の歴史を辿る形で記述されていて，ガロア理論にも触れている．

本書を書くにあたり，[1]や[5]を大いに参考にした．特に，方程式の歴史については[1]に依るところが多い．

最後に，執筆を勧めて下さった内田老鶴圃の内田学さんに心から感謝したい．

2013 年 12 月　　　　　　　　　　　　　　待兼山にて

今野 一宏