まえがき

本書は複素代数曲面に関するモノグラフである．代数幾何学の非専門家や大学 4 年生，修士課程の 1 年目で標準的な代数幾何学のテキストを何とか読了した程度の知識をもつ読者層を想定している．全くの初学者を対象とした入門書のように，非常に丁寧で痒いところに手が届くような工夫がなされているわけではない．しかし，定義を覚えることに振り回されて自分のいる場所を見失なうことなしに，概念が躍動する様をいくらかでも楽しめるよう，心を砕いたつもりである．代数曲面論への入門プラス α を目指すなら，代数好きには[63], [11]を, 特にそうでもないなら[45], [1]をお勧めする．こういった正統的な本を，消化不良を起こしながらも読んだ経験があれば，本書を無理なく読み進んでいけるだろう．

曲面論の本は，いわゆる「分類理論」を目標にするのが相場だが，本書はそうではない．代数幾何学関連の和書は，教科書を含めてすでにいくつも出版されているから，多少方向性が異なるものがあってもよいのではないかと考えた．非特異既約な射影代数曲面 S から，非特異既約な射影代数曲線 B への，連結なファイバーをもつ全射正則写像 $f : S \to B$ が興味の対象である．このような 3 つ組 (S, f, B) を代数曲線束と言ったり，ファイバー曲面と言ったりする．代数曲線束の理論は，射影代数曲面の双有理幾何とは少々異なり，いわば代数曲面がもつ有理関数の幾何学である．実際，定数でない有理関数とは，曲面から射影直線（リーマン球面）への支配的有理写像のことだから，不確定点の解消と Stein 分解を経由して，上に言う代数曲線束の形態に至る．珍しい関数がある曲面は，特殊な構造をもつし，逆もまた正しい．しかもそれは曲面の数値的不変量に反映される．代数曲線束の「地誌学」は，こういった信念に基づいて展開される．

代数曲面の歴史

本書の構成に立ち入る前に，まず，20 世紀までの代数曲面論の歴史を簡単に振り返っておこう．ただし，著者の浅学のため不正確・不適切な記述があるかも知れない．また，代数曲面論の歴史であって代数幾何学のそれではないことを重ねてお断りしておく．

18 世紀末から 19 世紀半ばにかけては，古典的な射影幾何学の黄金時代である．2 次元と 3 次元の複素射影空間は幾何学図形を描くカンヴァスとしての地位を確固たるものとし，1850 年頃には 3 次元射影空間内の次数が小さい曲面に関する研究が進められていた．非特異 3 次曲面上には 27 本の直線があるという有名な事実は，この時期に発見されたものである．Cayley 3 次曲面，Kummer 曲面，Steiner 4 次曲面など，当時盛んに研究された曲面が今に伝わっている．その後，代数曲面論はイタリアを拠点として著しい発展を遂げる．L. Cremona に始まるイタリア学派の第 1 世代に属する数学者として，E. Bertini, C. Segre, G. Veronese らを挙げることができる．今日にその名を留める Veronese 曲面や Del Pezzo 曲面は，この時期 (1880–90 年) の産物である．偉大な創始者 Riemann 以降，代数曲線論の中心地だったドイツでは，同じ頃 Max Noether が現在では「Noether の公式」として知られる重要な等式を得ている (1870 年, 75 年)．彼が 1886 年に見出した曲面上の曲線に関する「種数公式」は，どうやら証明が不完全だったようで，その後 1896 年に F. Enriques が G. Castelnuovo の結果を援用した証明を与えている．この二人，すなわち Castelnuovo と Enriques は，イタリア学派の第 2 世代を代表する．彼らは，1890 年から 1910 年頃にかけて，双有理幾何学的な視点から代数曲面論を展開して，双有理不変量を用いた代数曲面の分類理論を完成させた．遅れて，第 2 次世界大戦後の 1949 年に出版された有名な Enriques の本[30] は，イタリア学派の黄金時代と言うべきこの時代を象徴する秀作である．しかし，時が移り変わり，より高度で緻密な議論が求められるようになると，天才の幾何学的直感に頼り，数多くの具体例で検証・推理する方法には自ずと限界が見え始める．F. Severi らイタリア学派第 3 世代の頃になると，不明瞭な定式化や正確さに欠ける記述が無視できないほどになってしまったという．議論の根幹を支える確固たる基礎理論の欠如は，もはや明らかである．こう

いう状況を打破すべく，1930–40 年代には van der Waerden, Zariski, Weil らによって代数幾何学の可換代数的基礎付けが行われる．Zariski の本 [89] は，こういった厳密で新しいテクニックを駆使して書かれた意欲作である．一方で，1940–50 年代にかけて de Rham, Hodge, Lefschetz らによって，トポロジー，調和解析や微分形式を用いた超越的な方法も飛躍的な進歩を遂げる．その代数幾何学への決定的な寄与は，Leray に始まる層と層係数コホモロジー理論を通してもたらされた．H. Cartan の連接層の考え方は，岡潔による多変数解析関数の独創的研究（不定域イデアル）を起源とする概念であることは言うまでもない．Serre, Hirzebruch, Grothendieck らによって整備された理論は，イタリア学派やそれ以前に導入された双有理不変量の多くにコホモロジー論的な解釈を与えた．1955 年から 1965 年にかけてのことである．これを基礎として，1960–1970 年ごろ小平邦彦[48, 49]は必ずしも代数的でない曲面をも包括した 2 次元コンパクト複素多様体の分類理論の構築に成功する．同じ頃モスクワでは，Igor Shafarevich が代数曲面に関するセミナーを主催し，Manin, Tjurin, Tjurina らと共に，厳密なやり方で代数曲面の分類理論を再構築していた[76]．Enriques の分類は，有理曲面，線織面，超楕円曲面といった，特殊なクラスの曲面に関する深い知識と詳細な研究に基づいている．現代の用語で言えば，小平次元 $-\infty$ や 0 のクラスの一部である．K3 曲面や楕円曲面の理論が進展するのは，ずっと後のことであって，小平，Shafarevich らに負うところが大きい．分類表の中で最も広大なクラスである一般型曲面に関する組織的な研究は，1960 年代後半から 70 年代前半にかけての，小平・Bombieri による多重標準写像の研究から始まる．1970 年代後半になると，堀川穎二[43]は Noether 直線の近辺に不変量をもつ一般型曲面に対して徹底した研究を行った．また，彼は種数 2 のファイバー曲面の重要性を看破してその基礎理論を築き[44]，浪川・上野[70]とは異なる観点から特異ファイバーを分類した．時をほぼ同じくして，Gieseker がモジュライ空間の構成を行い，宮岡洋一[64]が宮岡・Yau の不等式を証明するに至って，一般型曲面を研究する基盤が出来上がったと言える．これらを受けて 1981 年に Ulf Persson [73]が提唱した「一般型代数曲面の地誌学」の考え方は，その後の一般型曲面論の展開における主要な指針となった．曲面の不変量を平面上にプロットして地図を作り，どの辺りにどんな性質の曲面

が存在するかを調査するという見方は，単純かつ素朴であるが故に万人に受容され，共通の研究基盤となったのである．曲面を研究するための方法論にも徐々に変化が見え始めた．古典的な線形系の理論は可逆層の大域切断に関するものだが，1970 年代以降，より高階数の局所自由層の性質を通して重要な結果が導かれるようになった．Bogomolov の不安定性定理[19]はその典型である．上述の宮岡・Yau の不等式や，1980 年代に登場する随伴線形系に関する Reider の定理も，正しくこの流れに沿うものである．1980 年代後半には，Xiao Gang が，藤田隆夫による相対標準層の順像の正値性に基礎を置いた一般種数のファイバー曲面論を展開し，一般型代数曲面の地誌学的な研究を強力に推し進めた．20 世紀末からは，ヨーロッパを中心に幾何種数 0 の一般型曲面の分類が着実に進められている．

構成と目的

第 1 章には，層係数コホモロジー論と Hodge 理論を除いて，標準的な射影代数幾何学の教科書にある内容を要約した．後の章で，その全てが必要になるわけではないが，初学者にはどんなことを勉強すればよいかを概観する上で役立つだろうし，既習者には簡便なお浚いになるだろう．第 2 章は，今度は代数曲面論に特化したお浚いである．[17]や[11]を参考にして，非特異射影曲面に対する交点理論や双有理写像の分解について解説する．従って，特に目新しいところはない．森理論に則した現代的な取り扱いは[59]に詳しい．ファイバー上の交点形式が半負定値であるという Zariski の補題は第 2.3 節で，ファイバー曲面の相対極小モデルについては第 2.7 節で論じる．第 3 章は，非特異曲面上の有効因子を相手にする際に重要な「連結性」の解説に充てる．もちろん，代数曲線束の特異ファイバーを念頭に置いている．どんなにたちの悪いファイバーが現れても決して怯まず，勇敢に立ち向かわなければならないから，そのための道具と訓練が必要なのだ．ここで基本的なのは，鎖連結性と数値的連結性である．どちらも有用な概念だが，より定着しているはずの後者ですら，正面から扱った書籍は洋書を含めても珍しい．こういった意味で連結な曲線は，ある部分を既約曲線と大差なく扱うことができる．その証左として，第 3.4 節では数値的連結曲線の標準環を調べ，生成

元や関係式に関する 1-2-3 定理を証明する．第 4 章は趣向を変え，不安定な局所自由層に対する Bogomolov の定理を目標とする．「代数曲面論の歴史」でも触れたように，これは近々の四半世紀を彩る潮流を形成した画期的な定理であり，現代的な代数曲面論を標榜する上では避けて通れない．ここでは，宮岡[65]のアイディアに従って，[58]に言う $\mathbb{Q}$ ツイストを使って議論を進める．応用としては，定番の Mumford-Ramanujam の消滅定理や Reider の定理を紹介する．以上が言わば第 I 部であり，代数曲面の一般論に相当する．しかし「分類理論」には敢えて立ち入らない．普通に分類すると，本書が扱う曲面のほとんどが「その他大勢」の範疇に入ってしまって，あまり意味がないからである．

第 5 章からが第 II 部で代数曲線束論である．χ_f, K_f^2, e_f という 3 種の数値的不変量を導入し，藤田の定理を基盤として，Arakelov の定理や Xiao のスロープ不等式を証明する．こうして，ファイバー曲面の数値的不変量が存在可能な領域が平面内に確定され，地誌学的考察が可能になる．スロープ不等式の顕著な応用例として，Pardini による Severi 予想の解決を紹介する．第 6 章は，堀川に始まり Xiao が整備した，超楕円曲線束論の解説に充てる．より精密なスロープ等式を確立し，スロープの下限からのズレを測る解析的な局所不変量（堀川指数）を導入する．併せて，スロープの上限をファイバー種数の関数として与える．これらは[88]に準拠した．また，向き付けられた実 4 次元コンパクト多様体の位相的な不変量である符号数が，特異ファイバーに集中し局在化する現象を観察する．位相幾何学と代数幾何学の接点のひとつである．第 7 章では，非超楕円曲線束に関する話題からいくつかを選んで解説する．主目的は，超楕円曲線束とは対極に位置する，モジュライの意味で一般な曲線を一般ファイバーとする代数曲線束に対して，スロープ等式を証明することにある．こちらのスロープ等式や堀川指数から導かれる局所符号数についても，超楕円曲線束と同様の位相幾何学的研究が期待される ([57]).

付録 A には，Gorenstein 射影代数曲線上の（非特殊）線形系に関する話題をまとめた．本書で使う程度の曲線論は，ここを見れば十分である．とても基本的なのに，思いのほか，和書には見当たらない事柄が多いので，付録だけでも独立に読めるように配慮した．付録 B は藤田の定理の証明に充てる．

いくつかの話題は，全体のまとまりや紙数を考慮して割愛した．例えば，種

数 1 の代数曲線束（楕円曲面）は，標準束公式を示す程度に留めた．今もなお原典[48, II]にあたるのが最良だと思うからである．それから，ファイバー空間を扱う書物としては落第かも知れないが，相対双対定理や半安定還元定理の証明も省略した．また，相対不正則数については，必ずしも成立しない不等式 $q_f \leq (g+1)/2$ を巡るあれこれがあって興味深いのだが，準備を要するため断念した．ファイバー芽の分裂変形（いわゆる，モース化）についても省略せざるを得ない．[3]や[79]を見よ．

代数曲線束の研究は，位相幾何学，代数幾何学，複素解析学など複数の分野が交錯する場であり，様々な切り口によって語られる性質が互いを刺激しながら発展している ([7], [9], [8], [6])．待望の[61]が出版され，コンパクト・リーマン面の退化を位相幾何学の側面から学ぶための王道が整備された．複素解析学には[46]という優れた和書がある．本書が代数幾何学的側面からの一助になればと願っている．