編 者 緒 言

本書は，藤原松三郎著「代数学」第一巻および第二巻を現代仮名遣いに改め，述語の一部を現在ひろく用いられているものに置き換えたものである．

本書の第一巻は 1928 年に，第二巻は 1929 年に刊行されたが，それは二十世紀の代数学の教科書のスタイルを根本的に変えた van der Waerden の “Moderne Algebra” が出版される直前であった（同書第 I 巻は 1930 年，第 II 巻は 1931 年の刊行）．また，我が国において代数学の古典として読み継がれてきた高木貞治による「初等整数論講義」および「代数学講義」はそれぞれ 1930 年，31 年に出版されている．今日の目で眺めたとき，これらのことが本書をその組立てにおいて，また，内容において極めて独自なものとしている．

本書の特徴として，代数学全般にわたり基礎的理論を詳述し，かつ高度な内容にまで説き及んでいるだけでなく，概念導入にあたりその背景を説明し具体例を挙げるなど丁寧な叙述をしているため，自修書としても適していると言えよう．さらに，第八章および第九章で系統的に論じられている Fourier の定理，Sturm の定理あるいは Routh-Hurwitz の定理など代数方程式の根の分布に関する理論や Newton 法や Horner 法などの近似解法は，現代の大学の学部教育で教えられることは稀であるが，力学系理論，物理学や工学等において重要であり，これらの方面の専門家にとっても貴重な参考書となっている．また，原著は巻末に補遺を追加して，本文の訂正や文献の追加を行っている．特に，最後に加えられた補遺は，江戸時代に和算家が得た諸結果を本巻で展開されている西洋数学の成果と対比したもので，著者が心血を注いだ和算史研究の成果の一端を知ることができる．本改訂版では「和算家による独創的成果」と題を改めて収録した．

述語については，著者が独語，英語等から直接訳出したものも相当数あると思われる．そのため，第二巻序言でも述べられているように，他書とは異なる述語が散見され，その中には定着しなかったものもある．本改訂版では，「方列」を「行列」とするなど，それらを現在標準的に用いられているものに置き換えた．しかしながら，著者の

意図を尊重して，変更しなかったものや，敢えて広く流通しているとは言い難いものに置き換えた場合もあることをお断りしておく．例えば，原著では「整函数」は，「多項式」(「整式」とも言う）を指しているが，数論における整数と有理数に対応するものとして，整函数と有理函数と呼ぶことには充分な正当性があると考える．しかし現在では，専ら複素平面上で正則な関数を整関数と呼んでいるのを考慮して，本改訂版では原著にもある「有理整関数」を採用することとした．

編者らの浅学非才のため，思わぬ誤解から却って原著の明晰性を損ねてはいないかと恐れる．読者の叱正を俟って改訂をしていく所存である．

改訂にあたり述語や文献についてご教示いただいた都築暢夫東北大学教授に感謝の意を表したい．

2019 年 1 月

編著者

目　　次

第 3 章　無理数

第 4 章　有理数による無理数の近似

第 5 章　複素数

第 6 章　有理整関数

第 7 章　行列式

第 8 章　方程式

第 9 章　方程式と二次形式

第1章　有理数体[†]

第1節　自　然　数

1.1. **緒言.**　数学の基礎は自然数の概念である．この概念は物を数えるということから普通得られるものであるが，この心理的発生の順序を離れ，自然数を論理的に定義しようとすると，たちまち少なからざる困難に遭遇する．故にこのような根本的な問題はしばらくこれを措き，我々はすでに自然数の概念を得たものとして我々の論究の歩を進めていくことにする．ただこれらの知識を組織づけるため，一応自然数系の性質を列挙しよう．

我々が第一に気づくことは，自然数の系統

$$\mathbf{N}: \qquad 1, 2, 3, 4, \ldots$$

には順序が存在していることである．1 の後に 2，2 の後に 3，3 の後に 4 という風に，$\mathbf{N}$ のいずれの一数をとっても必ずその後に続くものが一つ，しかも唯一つ存在する．n の後に続くものを n の**後者**と名づけ，n^* にて表せば，1 の後者 1^* は 2 であり，2 の後者 2^* は 3 である．

$\mathbf{N}$ に属する数には，最初の 1 を除けば必ずそれの前に来るものが唯一つ存在する．n の前にくる数を ${}^*n$ にて表し，これを n の**前者**と名づければ，3 の前者 ^{*3} は 2，2 の前者 ^{*2} は 1 である．ただ 1 だけには前者がない．

次に一つの自然数 n に 1 を加えるということは，n より n の後者 n^* を作る演算である．これを $n+1=n^*$ にて表す．

二つの自然数の和は，

---

† 第 1 章については，Loewy, Lehrbuch der Algebra I, 1915; Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre I, 1916; 高木博士，新式算術講義 第八版，1912 を参照されたい．

$$a+(b+1)=(a+b)+1$$

なる関係により順次定義されるものである．例えば

$$5+3=5+(2+1)=(5+2)+1,$$

$$5+2=5+(1+1)=(5+1)+1=6+1=7,$$

故に

$$5+3=(5+2)+1=7+1=8.$$

二つの自然数の積は

$$a\cdot 1=a, \qquad a(b+1)=a\cdot b+a$$

により順次定義されるものである．例えば

$$a\cdot 2=a(1+1)=a+a, \quad a\cdot 3=a(2+1)=a\cdot 2+a=a+a+a, \quad \ldots .$$

この和および積を作る演算をそれぞれ加法，乗法と呼ぶ．それは次の法則により支配される．

加法の交換法則： $a+b=b+a.$

加法の結合法則： $a+(b+c)=(a+b)+c.$

乗法の交換法則： $a\cdot b=b\cdot a.$

乗法の結合法則： $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$

分配法則： $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c, \quad (b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a.$

1.2. 自然数系の公理.

以上の事実を既知のものとして出発するとしても，既知として取扱うものはできるだけ少数にとどめ，その他のすべてを論理的に導き出すことは，我々が常に努めるべきところである．

この見地より我々は自然数系 $\mathbf{N}$ を次の**公理**によって定義することにする[*1]．

N_1) $\mathbf{N}$ は 1 を含む．

N_2) $\mathbf{N}$ に属する数 a の後者は常に唯一つ存在する．これを a^* とする．

---

§1.2,*1 自然数系の公理は Peano より始まる．Peano, Formulaire des mathématiques, Torino, 1898, t.2, pp.1–59; t.3, pp.39–44; Loewy, Algebra 参照.

第 2 章　有理数体の数論†

第 1 節　素　　数

2.1. **素数.**　我々は第 1 章において，整数を支配する法則を論じた．本章においては，専ら個々の整数の組立てに関する性質を研究しよう．これが狭義の**数論**である．

すでに §1.23 において定義したように，整数 a が整数 b にて整除される場合，換言すれば，$a = bc$ が成立する第三の整数 c が存在する場合，a を b の**倍数**，b を a の**約数**または**因数**という．a はまた c の倍数，c は a の約数である．

定義によれば，$a \cdot 1 = a$ であるから，1 および a 自身は整数 a の約数であるが，それ以外に約数をもたない正整数がある．それらを**素数**と名づける．1 および自己以外に約数をもつ正整数を**合成数**と名づける．1 は合成数ではないが，便宜のため，素数の内には加えないことにする．

2 を約数とする正整数を**偶数**といい，その他の正整数を**奇数**という．2 は唯一の偶数の素数である．他のすべての素数は当然奇数でなければならない．このことが素数中 2 がしばしば特別の取扱いを要求する原因になる．

2.2. **エラトステネスの篩.**　我々の第一の問題は，与えられた正整数 a が素数なるか否かを，いかにして決定すべきかである．

a が合成数ならば，$a = bc$, $(b, c \geqq 2)$ なる形をとる．$b \leqq c$ とすれば $a \geqq b^2$，従って b は $k^2 \leqq a < (k+1)^2$ が成立する k を超え得ない．故に a が素数なることを確かめるには，$2, 3, 4, \ldots, k$ のいずれをも約数にもたないことを見ればよい．然るに $2, 3, 4, \ldots, k$ の一つ n がすでにそれより以前の数を約数にもてば，n が a の約数な

† 本章に関しては，Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 4 Aufl., 1894; Bachmann, Niedere Zahlentheorie I, 1902; 竹内博士, 整数論, 1925; Cahen, Théorie des nombres 1 (1914), 2 (1924) 参照．文献は Dickson, History of the theory of numbers 1, 2, 1919, 1920 に詳しい．

るか否かを調べる必要がない．故に次のように行えば，手数は少なからず省き得られると同時に，a を超えないすべての素数が一挙にして求められる．これはギリシャの昔から知られ**エラトステネスの篩**（ふるい）と呼ばれているものである．

例えば，これを $a = 20$ について説明してみよう．まず

$$2,\ 3,\ 4^*,\ 5,\ 6^*,\ 7,\ 8^*,\ 9^*,\ 10^*,\ 11,\ 12^*,$$
$$13,\ 14^*,\ 15^*,\ 16^*,\ 17,\ 18^*,\ 19,\ 20^*$$

の内，2 の倍数を消す．これは 2 より始めて，二つ目を消していけばよろしい（消したものは * 印にて表す）．次に残った最初の数，すなわち 3 の倍数を消す．これは 3 より始めて三つ目を消していけばよい．$4^2 < 20 < 5^2$ であるから，4 までやればよろしい．然るに 4 はすでに消されているから，改めて 4 の倍数を消す労をとるに及ばない．このようにしてふるい残された数，すなわち 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 が 20 を超えない素数の全体である．

2.3.　素数の表．　この方法で，100 を超えない素数を定めれば，次の 25 個が得られる．

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,$$
$$43,\ 47,\ 53,\ 59,\ 61,\ 67,\ 71,\ 73,\ 79,\ 83,\ 89,\ 97.$$

10^4 以下の素数の表は，チェビシェフ (Tchebycheff)，Theorie der Kongruenzen, 1889 の巻末にある．より広い範囲の素数の表は，Carnegie-Institution から刊行せられた，レーマー (Lehmer), List of prime numbers from 1 to 10006721, Washington, 1914 である．

2.4.　無限に多くの素数の存在．　素数の数には限りがあるか．この問いに対しては，早くすでにユークリッドが，彼の幾何学原本第九巻，命題 20 において，次の答を与えている．

定理．　**素数は無限に多く存在する．**

任意の正整数は，少なくとも一つの素数を約数にもつ．何となれば，正整数 a 自身が素数ならば，いうまでもない．a が合成数ならば，$\geqslant 2$ なる二つの約数の積 $b \cdot c$ と

第3章　無　理　数[†]

第1節　循 環 小 数

3.1.　収束数列.　有理数の無限に続く数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

と，有理数 a とがあって，ε をいかに小なる正の有理数としても，正整数 n_0 を定めて，n_0 より大なるすべての n に対し常に

$$|a-a_n|<\varepsilon$$

が成立するならば，a を数列 $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ の**極限**と名づける．この数列は a に**収束**（あるいは**収斂**）するともいう．

例えば

$$\left(1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\right)$$

を見ると，ε をいかに小さくとっても，$n>n_0>\dfrac{1}{\varepsilon}$ とすれば

$$\left|1-\frac{n+1}{n}\right|<\varepsilon$$

となる．故に

$$\left(1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\right)$$

の極限は 1 である．

極限を有する数列を**収束数列**と名づける．

収束数列については次の定理が成立する．

定理.　有理数列 $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ がそれぞれ有理数 a, b に収束すれば，$(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n, \ldots)$, $(a_1-b_1, a_2-b_2, \ldots, a_n-b_n, \ldots)$,

---

† 本章に関しては，第 1 章にあげた Loewy, Pringsheim の書の他に，Perron, Irrationalzahlen, 1921 を参照されたい．

$(a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n, \ldots)$ はそれぞれ $a+b$, $a-b$, ab に収束する．

我々はこのうち，第三のみを証明し，他は同様であるから省略することにする．

仮定により，ε を任意に与えると，$n>n_1$ なるすべての n に対し $|a-a_n|<\varepsilon$ となるような n_1 と，$n>n_2$ なるすべての n に対し $|b-b_n|<\varepsilon$ となる n_2 が定まる．n_1, n_2 の大なる方を n_0 とすれば，$n>n_0$ に対し常に $|a-a_n|, |b-b_n|<\varepsilon$ となる．

然るに

$$ab-a_nb_n = a(b-b_n)+b_n(a-a_n)$$

であるから，絶対値に関する §1.26 の定理より

$$|ab-a_nb_n| \leqq |a||b-b_n|+|b_n|\cdot|a-a_n|$$

が得られる．$n>n_0$ に対しては $|b-b_n|<\varepsilon$ なる故に，$|b_n|<|b|+\varepsilon$．故に $n>n_0$ に対しては

$$|ab-a_nb_n| < (|a|+|b|+\varepsilon)\varepsilon$$

となる．$|a|+|b|+\varepsilon$ は有限であるから，ε を充分に小さくとれば，$(|a|+|b|+\varepsilon)\varepsilon$ をいかに小なる有理数 ε' よりも，さらに小にすることができる．従って任意の ε' に対し，n_0 を定め，$n>n_0$ なるすべての n に対し $|ab-a_nb_n|<\varepsilon'$ とできる．

すなわち数列 $(a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n, \ldots)$ は ab に収束する．

同様にして次の定理が証明される．

定理.　数列 $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ がそれぞれ有理数 a, b に収束し，$b \neq 0$ ならば，$\left(\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \ldots, \dfrac{a_n}{b_n}, \ldots\right)$ は $\dfrac{a}{b}$ に収束する．

仮定により，任意の ε に対し n_0 を定め，$n>n_0$ なるすべての n に対し $|a-a_n|<\varepsilon$, $|b-b_n|<\varepsilon$ とできる．然るに

$$\frac{a}{b}-\frac{a_n}{b_n} = \frac{a-a_n}{b}+a_n\frac{b_n-b}{bb_n},$$

従って

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{a_n}{b_n}\right| \leqq \frac{|a-a_n|}{|b|}+\frac{|a_n|\cdot|b_n-b|}{|b_n|\cdot|b|}.$$

$n>n_0$ に対しては $|a_n|<|a|+\varepsilon$, $|b_n|>|b|-\varepsilon$．$b \neq 0$ であるから，ε を初めから充分小さくとれば，$|a|+\varepsilon < |a|+1$, $|b|-\varepsilon > \dfrac{1}{2}|b|$ となるようにできる．従って，

第4章　有理数による無理数の近似[†]

第1節　連分数の主要性質

4.1. 小数による無理数の近似. 前章において，我々は有理数の収束数列を以て無理数を定義した．これによれば，任意の無理数は有理数を以て漸次これに近づけることができる．このことを**有理数による無理数の近似**という．これに関する我々の第一の問題は，無理数を与えたとき，これに近似する有理数列をどのようにして定めるかということである．

この問題の解答として，二つの方法を挙げることができる．一は小数によるもので，他は連分数によるものである．

まず小数による無理数の近似から論じよう．

実数 ω と正の整数 g $(\geqq 2)$ をとり，次の演算を行う．

$[x]$ を以てガウスの記号，すなわち $x-1<[x]\leqq x$ を満たす整数を表すものとすれば

$$\begin{array}{ll}
a_0=[\omega], & \omega_1=\omega-a_0,\\
a_1=[g\omega_1], & \omega_2=g\omega_1-a_1,\\
a_2=[g\omega_2], & \omega_3=g\omega_2-a_2,\\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_n=[g\omega_n], & \omega_{n+1}=g\omega_n-a_n,\\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

により順次整数 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ が定まる．a_0 は ω の如何により 0 または正負のいず

† 本章に関しては，Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1913; Pringsheim, Zahlen- und Funktionenlehre I. 3, 1921 参照.

れともなるが，$\omega_1, \omega_2, \ldots$ はすべて 1 より小なる正数である．従って，a_1，a_2，a_3，$\ldots$ は $0 \leqq a_i < g$ を満足する整数である．これより

$$\omega = a_0 + \omega_1, \quad \omega_1 = \frac{a_1}{g} + \frac{\omega_2}{g}, \quad \frac{\omega_2}{g} = \frac{a_2}{g^2} + \frac{\omega_3}{g^2}, \ \ldots,$$

従って

$$\omega = a_0 + \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \frac{a_3}{g^3} + \cdots + \frac{a_n}{g^n} + \frac{\omega_{n+1}}{g^n}$$

が導かれる．ω と分数

$$b_n = a_0 + \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \frac{a_3}{g^3} + \cdots + \frac{a_n}{g^n}$$

との差 ω_{n+1}/g^n は $1/g^n$ より小である．$g \geqq 2$ である故に，n を充分大にすれば，この差は任意に与えられた正数 ε よりも小にすることができる．すなわち $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ なる収束数列の極限は ω に等しくて

$$\omega = a_0 + \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \frac{a_3}{g^3} + \cdots + \frac{a_n}{g^n} + \cdots$$

となる．

実数 ω が有理数を表すための必要条件は，上の級数が有限の所で切れるか，または循環小数となることである．これはすでに §3.3 で論じた所である．これがまた充分条件となることは，次のように考えれば明らかである．

有限で切れる場合に有理数を表すことはいうまでもない．

循環小数であれば，その循環節を $(a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+k-1})$ とすれば，

$$g^k\omega = \left(a_0 + \frac{a_1}{g} + \cdots + \frac{a_{m+k-1}}{g^{m+k-1}}\right)g^k + \frac{a_{m+k}}{g^m} + \frac{a_{m+k+1}}{g^{m+1}} + \cdots,$$

$$g^k\omega - \omega = \left(a_0 + \frac{a_1}{g} + \cdots + \frac{a_{m+k-1}}{g^{m+k-1}}\right)g^k - \left(a_0 + \frac{a_1}{g} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{g^{m-1}}\right)$$

となる．この右辺は一つの有理数であり，左辺は $(g^k - 1)\omega$ であるから，ω は有理数でなければならない．

すなわち次の定理が得られる．

定理．　実数 ω を，g を底とする小数

$$\omega = a_0 + \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \frac{a_3}{g^3} + \cdots + \frac{a_n}{g^n} + \cdots$$

に展開した場合に，ω が有理数となるための必要にして充分な条件は，この小数展開が有限で切れるか，または循環小数となることである．

第5章　複　素　数

第1節　複素数体

5.1.　数の概念の最後の拡張.　前数章において，我々は自然数より出発し，数度の拡張によって実数体に到達した．この数体では零による除法を除いては加減乗除が何らの拘束なしに行われる．しかし開平方，すなわち a を与えて $x^2 = a$ が成立する x を求めることに関し，a が負の場合に，我々は再び一つの障壁に直面しなければならない．何となれば，実数の平方は決して負とならないからである．

この制限を撤去して開平方が再び自由に行われるために数の概念の最後の拡張を行い，ここに複素数なる新しい数を導入する[*1]．

5.2.　複素数の定義.　整数より有理数に進む場合に整数の一対を考えたと同様に，我々はここでは実数の一対 (a, b) を新しい数と考えて，これを**複素数**と名づける．相等，和および積に関しては次の定義をおく[*1]．

I.　$a = c, b = d$ なるときに限り $(a, b) = (c, d)$ とする．

II.　$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

III.　$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

これより相等に関するすべての規定 (§1.3，1.7，1.11)，および交換，結合，分配法則は複素数によって満足されることが容易に証明されるであろう．

$(a, b) = (x, y) + (c, d)$ を満足する (x, y) を $(a, b), (c, d)$ の差と定義する．上の和および相等の定義より

---

§5.1,*1　〔**編者注**：数の概念はさらに四元数，ケイリー数などに拡張された．これについては第 2 巻，第 12 章で論ずる.〕

§5.2,*1　この定義のしかたは，Hamilton, Theory of conjugate functions or algebraic couples, Dublin, 1835（Trans. Irish Academy 17, 1837 より）に始まる．

$$a = c + x, \quad b = d + y, \quad \text{従って} \quad x = a - c, \quad y = b - d$$

となる．すなわち減法は常に一通りに可能であって

$$(a,\, b) - (c,\, d) = (a - c,\, b - d)$$

が二つの複素数の差を表す．

$(a,\, b)$ を $(c,\, d)$ で除した商を定義するには

$$(a,\, b) = (c,\, d) \cdot (x,\, y)$$

を満足する $(x,\, y)$ を以てする．故に定義により $a = cx - dy$, $b = cy + dx$ となる．$c^2 + d^2 = 0$ すなわち $c = d = 0$ の場合を除けば

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \qquad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

となる．すなわち除法は除数が $(0,\, 0)$ の場合を除けば常に一通りに可能であって，商は次の形で表される．

$$\frac{(a,\, b)}{(c,\, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2},\, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right).$$

すなわち次の定理が得られる．

定理．　複素数の全体は一つの数体をつくる．

この数体を**複素数体**と名づける．

特別な場合として：

$$a = b \text{ のときに限り}, \ (a,\, 0) = (b,\, 0).$$

$$(a,\, 0) + (b,\, 0) = (a + b,\, 0).$$

$$(a,\, 0) - (b,\, 0) = (a - b,\, 0).$$

$$(a,\, 0) \cdot (b,\, 0) = (ab,\, 0).$$

$$\frac{(a,\, 0)}{(b,\, 0)} = \left(\frac{a}{b},\, 0\right), \quad (b \neq 0)$$

が成立する．これによれば，$(a,\, 0)$ の形の複素数は実数 a と全く同一の法則に支配される．故に $(a,\, 0)$ なる特別の複素数と，実数 a とを同一のものと見なして差支えがない．故に以下

$$(a,\, 0) = a$$

第6章　有理整関数[†]

第1節　有理関数体

6.1.　有理整関数．　x を以て一定の数を表すものとせず，ある範囲内の有限個または無限個の数値を取り得るものと考えるとき，これを**変数**と名づけ，これに対し，一定の数値を表すものを**常数**と名づける．

常数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ と変数 x との結合

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

を x の**有理整関数**，または単に**整関数**と名づけ[*1]，$a_0, a_1, \ldots, a_n$ を**係数**，$a_n x^n$, $a_{n-1}x^{n-1}, \ldots, a_1 x, a_0$ を**項**と名づける．特に x を含まない項 a_0 を**絶対項**という．$a_n \neq 0$ ならば，n を**次数**と呼び，上の有理整関数を n 次の有理整関数と名づける．

係数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ が一つの数体 K に属すれば，この有理整関数を **K の有理整関数**という．あるいは K に属するともいう．

我々はまず有理整関数の加減乗除，およびこれを支配する法則を定めねばならない．

二つの有理整関数

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

$$G(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

において，$n = m$, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ なる場合に限り，$F(x)$, $G(x)$ は相等しいと定義し，$F(x) = G(x)$ によってこれを表す．

---

† 本章以下第 9 章までに関しては，H. Weber, Lehrbuch der Algebra I, 2. Aufl., 1912 参照．

§6.1,*1 〔**編者注**：原著では「整関数」を主たる術語として採用しているが，現代では，整関数は専ら複素変数関数論において，複素平面全体で正則な関数を指す用語として定着している．そのため，本改訂版では，有理整関数と呼ぶことにする．また，多項式と呼ぶことも多い．〕

この相等の定義は第 1 章にあげた相等に関するすべての公理を満足する．

$F(x)$, $G(x)$ の和，差，積としては，それぞれ（$n \geqq m$ と仮定して）

$$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_m+b_m)x^m+a_{m+1}x^{m+1}+\cdots+a_nx^n,$$

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+\cdots+(a_m-b_m)x^m+a_{m+1}x^{m+1}+\cdots+a_nx^n,$$

$$\begin{aligned}&a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots\\&\quad+(a_0b_m+a_1b_{m-1}+\cdots+a_mb_0)x^m+(a_1b_m+a_2b_{m-1}+\cdots+a_{m+1}b_0)x^{m+1}\\&\quad+\cdots+(a_{n-1}b_m+a_nb_{m-1})x^{n+m-1}+a_nb_mx^{n+m}\end{aligned}$$

を以て定義し，これを $F(x)+G(x)$, $F(x)-G(x)$, $F(x)\cdot G(x)$ により表す．

これより直ちに分かることは，有理整関数の間にも数の場合と同様に

交換法則：$F(x)+G(x)=G(x)+F(x), \quad F(x)G(x)=G(x)\cdot F(x)$.

結合法則：$F(x)+\{G(x)+H(x)\}=\{F(x)+G(x)\}+H(x)$,

$F(x)\{G(x)\cdot H(x)\}=\{F(x)G(x)\}H(x)$.

分配法則：$F(x)\{G(x)+H(x)\}=F(x)G(x)+F(x)H(x)$

が成立することである．

$F(x)$, $G(x)$ の次数を n, m とすれば，積 $F(x)\cdot G(x)$ の次数は $n+m$ である．$F(x)\pm G(x)$ の次数は，$n>m$ ならば n になるが，$n=m$ の場合には n より低くなることがある．

$F(x)$, $G(x)$ が共に数体 K の有理整関数ならば，その和，差，積もまたすべて K の有理整関数である．

6.2. 有理整関数の除法.

二つの有理整関数

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n, \quad (a_0\neq 0)$$

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m, \quad (b_0\neq 0)$$

の次数をそれぞれ n, m とし，$n \geqq m$ と仮定する．この場合

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x) \tag{1}$$

を満足する二つの有理整関数 $q(x)$, $r(x)$ を定め，$r(x)$ の次数を $g(x)$ の次数より低くすることができる．しかもこれは唯一通りに可能である．

第7章　行　列　式†

第1節　置　　換

7.1.　行列式の起源.　多元一次方程式の一組，例えば

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \tag{2}$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \tag{3}$$

を解くには，まず (1), (2) より z を消去するため，(1) に c_2，(2) に c_1 をかけて相減じれば

$$(a_1c_2 - a_2c_1)\,x + (b_1c_2 - b_2c_1)\,y = d_1c_2 - d_2c_1 \tag{4}$$

が得られる．(1) に c_3，(3) に c_1 をかけて相減じれば

$$(a_1c_3 - a_3c_1)\,x + (b_1c_3 - b_3c_1)\,y = d_1c_3 - d_3c_1 \tag{5}$$

となる．次に (4), (5) より y を消去するため, (4) に $(b_1c_3-b_3c_1)$, (5) に $(b_1c_2-b_2c_1)$ をかけて相減じれば

$$\begin{aligned}&\{(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) - (a_1c_3 - a_3c_1)(b_1c_2 - b_2c_1)\}\,x\\ &= (d_1c_2 - d_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) - (d_1c_3 - d_3c_1)(b_1c_2 - b_2c_1).\end{aligned} \tag{6}$$

これより x が求められる．(6) の両辺を書直せば

$$\begin{aligned}&c_1\bigl\{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1\bigr\}x\\ &= c_1\bigl\{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3 - d_3b_2c_1\bigr\}\end{aligned}$$

---

† 本章に関しては Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, 1909; Pascal, Die Determinanten, 1900 参照．文献に関しては Muir, History of determinants 1–4, 1906–1923, 特に 1 参照.

となる．この係数の形を見れば，ある一定の法則の存在が認められるであろう．これを拡張して n 個の変数を含む一次方程式の n 個の一組を考えるとき，係数を支配する法則の組織的研究が必要になる．

このような動機から行列式の概念が生まれ出たのである．欧州の数学史上で最も早くこの思想が現れたのはライプニッツが 1693 年にロピタルに送った書簡中であるが，これは 1850 年にゲルハルトがライプニッツ遺稿中から発見するまでは全く埋もれていた[*1]．従って行列式の理論の発展には直接の影響を与えなかった．

行列式の理論の実際上の源泉はクラメルが 1750 年に公にした代数曲線に関する書[*2]であって，ライプニッツと同様に，やはり一次方程式の一組の解から出発している．

しかしながら林博士[*3]は，我国の大数学者，関孝和 (?–1708) の交式斜乗の法は行列式そのものであって，関の発見年代は 1683 年以前であることを初めて公にされた．すなわちライプニッツよりさらに 10 年余早いのである．

本章において我々は行列式の理論と応用に一斑を論じる．

まず置換なる概念から始めよう．

7.2. 置換． 今ここに n 個の物をとる．それは数であってもなくてもよろしい．これを**要素**と名づけ，簡単のため数字 $1, 2, \ldots, n$ で表すことにする．

これら n 個の要素を番号の順に配列すれば，$(1, 2, 3, \ldots, n)$ となるが，これを他の任意の配列に換える．例えば，これを $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ とする．$p_1, p_2, \ldots, p_n$ は全体では $1, 2, \ldots, n$ に等しいが，ただその順序が異なっているに過ぎない．一つの配列から他の配列に移る演算を**置換**と名づける．$(1, 2, 3, \ldots, n)$ から $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ に移る置換を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ で表す．

この置換においては，1 が p_1 に，2 が p_2 に，以下順次 n が p_n に換わる点に重き

---

§7.1,*1 Leibniz, Math Schriften, Berlin, 1850, I, p.229, 238–240, 245; Gerhardt, Berliner Ber., 1891.

*2 Cramer, Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques, 1750, pp.59–60, 656–659.

*3 林，東京数学物理学会記事 (2) 5, 1910.

第8章　方　程　式†

第1節　低次方程式

8.1.　二次方程式.　二次方程式の解法はすでにユークリッドの幾何学原本の中に，幾何学の衣をつけて論じている．しかしギリシャでは負数の概念が知られていなかったから，負根の考えは全然ない．これに反してインドでは正根負根の区別を認め，二次方程式の二根を定める公式が考えられているが，無論虚根の考えは未だ生じていなかった．虚根の存在を考えるようになったのは十六世紀のイタリアの数学者カルダノ，ボンベリらから始まる．

二次方程式

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

を解くには，まず，$x = y + \lambda$ とおいて，第二項の欠けた二次方程式に移す．このことを

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

について行えば，$f(x) = 0$ は次のようになる．

$$\varphi(y) = b_0y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \cdots = 0,$$

ただし

$$b_0 = a_0,\ b_1 = na_0\lambda + a_1,\ b_2 = \frac{n(n-1)}{2}\,a_0\lambda^2 + (n-1)a_1\lambda + a_2,\ \ldots$$

故に

$$\lambda = -\frac{a_1}{na_0}$$

とすれば，y^{n-1} の項はなくなる．

---

† 〔**編者注**：第 2 節以降で述べるが，ある区間内における方程式の解の個数を知る方法は，二分法と組合せて応用数学上重要である．〕

これを二次方程式に施せば次のようになる．

$$\varphi(y) = b_0 y^2 + b_2 = 0, \quad b_0 = a_0, \quad b_2 = (4a_0a_2 - {a_1}^2)/4a_0.$$

故に

$$y = \pm \frac{1}{2a_0}\sqrt{{a_1}^2 - 4a_0a_2},$$

従って

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{{a_1}^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$$

が与えられた方程式の根である．

8.2.　三次方程式[*1]．　三次方程式

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

に上記の方法を適用すると次のようになる．

$$\varphi(y) = b_0y^3 + b_2y + b_3 = 0.$$

ただし

$$b_0 = a_0, \quad b_2 = (-{a_1}^2 + 3a_0a_2)/3a_0,$$

$$b_3 = (2{a_1}^3 - 9a_0a_1a_2 + 27{a_0}^2a_3)/27{a_0}^2.$$

今 $\varphi(y) = 0$ を簡単のために

$$y^3 + ay + b = 0$$

の形に直し，$y = u + v$ とおけば

$$u^3 + v^3 + (3uv + a)(u + v) + b = 0.$$

故に

$$3uv = -a$$

とすれば

§8.2, *1　三次方程式は球および円筒に関する Archimedes の論文の中で初めて現れた．三次方程式の分類と解法とを論じた人にアラビアの Omar Alkayyami があるが，これは二つの円錐曲線の交点を定める問題に導いたのであって，真の代数的解法は十六世紀の Scipione del Ferro が初めて与えた．Cardano と Tartaglia との間の三次方程式の解法についての論争は Cantor の Geschichte der Math. II, pp.490–494 に詳しく出ている．

第9章　方程式と二次形式

第1節　二 次 形 式†

9.1.　二次形式.　スツルム以後におけるスツルムの定理の発展を論ずるには，当然二次形式の理論を必要とする．しかし二次形式の理論は第2巻で改めて論じるので，ここでは当面の目的に必要なもののみに止める．

n 個の変数 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の二次の同次関数

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

を，これらの変数の**二次形式**といい，その係数の作る行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

をこの**二次形式の行列式**と名づける．これは一つの対称行列式である．

$$x_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \cdots + c_{in} y_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{i}$$

とすれば，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の二次形式になる．これを

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{p,q=1}^{n} b_{pq} y_p y_q$$

とすれば

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} (c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \cdots + c_{in} y_n)(c_{k1} y_1 + c_{k2} y_2 + \cdots + c_{kn} y_n)$$

に等しいから，$y_p y_q$ の係数を比較して

---

† 〔**編者注**：二次形式は，今日では線形代数学の中で論じられるが，数学全般，統計学さらには情報科学等において，重要な概念や最適解探索アルゴリズムなどを提供する基盤理論である．〕

$$b_{pq} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} c_{ip} c_{kq} = \sum_i c_{ip} \sum_k a_{ik} c_{kq}$$

を得る．故に $e_{iq} = \sum\limits_k a_{ik} c_{kq}$ とおけば $b_{pq} = \sum\limits_i c_{ip} e_{iq}$ となり，行列式の乗法により

$$|e_{ik}| = |a_{ik}| \cdot |c_{ik}|, \qquad |b_{ik}| = |c_{ik}| \cdot |e_{ik}|,$$

すなわち

$$|b_{ik}| = |a_{ik}| \cdot |c_{ik}|^2$$

を得る．これは $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の行列式 $|a_{ik}|$ と $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の行列式 $|b_{ik}|$ との間の関係を示すもので，重要な意義をもつものである．これを次に定理として掲げておく．

定理 1.　二次形式 $\sum a_{ik} x_i x_k$ が (i) なる一次変換によって，$\sum b_{ik} y_i y_k$ となればその行列式の間には次の関係が成立する．

$$|b_{ik}| = |a_{ik}| \cdot |c_{ik}|^2.$$

このようにして $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の二次形式を $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の二次形式に変換すれば，次の定理を得る．

定理 2.　二次形式 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が ρ 個の変数の二次形式に直され，決して ρ より少ない変数の二次形式に直されないために必要にして充分なる条件は，二次形式 f の行列式の階数 r が ρ に等しいことである．

これを次のように二段に分けて証明する．

まず $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に変換されたとき，変数の数が n より少なくなったとする．例えば y_n が全く入ってこないとすれば，b_{1n}, b_{2n}, …, b_{nn} なる係数は皆 0 である．故に $|b_{ik}| = 0$ となる．従って上の関係式より $|a_{ik}| = 0$ となる．何となれば $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ なる変数は互いに独立であるから $|c_{ik}|$ は 0 でないからである．

故に二次形式 f の行列式 D の階数 r が n に等しければ，f は決して n 個より少ない変数の二次形式には直らないことが分かる．

次に $r < n$ の場合を考える．今仮に