計算力をつける

微分積分 問題集

神永正博・藤田育嗣
共著

内 田 老 鶴 圃

まえがき

本書は，数学を道具として利用する理工系学生向けの微分積分学の入門書『計算力をつける微分積分』の問題集である．同書は幸いにもご好評をいただき，版を重ねてきたが，計算力の養成のためにさらなる問題演習が必要という声が多く，適切な分量の問題集の刊行が望まれていた．本書ではこの要望に応え，691 の問題を作成し，1 冊とした．

本書は，基本的に『計算力をつける微分積分』の学習内容に沿っている．各章前半には，理解の助けとなる図やグラフと共に，定理や公式等の基本事項がまとめられている．特に問題を解く際に適用しやすい形で書かれているので，教科書を読んだ後でも解けない問題があったらこちらを参照するとよい．各章後半の問題は，A と B に分かれている．A は比較的易しい問題で，教科書の問レベルのものである．B はやや難しい問題だが，教科書の章末問題よりはやや易しいものである．急いで基礎を固めたい場合は，A だけでも一定の計算力は身につけられるはずである．なお，A の各問には関連する節番号が記されている．

第 1 章では，指数関数，対数関数を，第 2 章では，三角関数，逆三角関数を学習する．これらは，逆三角関数を除けば高等学校の復習だが，3 章以降の微分積分学の学習の中で必要になるものばかりである．理解に不安があれば，適宜問題を解いて確認してみるとよい．3 章以降が理解できない場合，1 章，2 章でつまずいている場合が少なくないからである．例えば，三角関数の積分計算では，三角関数の性質が巧みに利用されるため，積分以前に，三角関数の性質を熟知していなければならない．

工業高校等からの入学者を想定し，第 3 章，第 4 章は，ほぼ高等学校の「数学 III」に相当する内容になっている．3 章では，テイラー展開，4 章においては，高等学校よりもやや複雑な積分技法と広義積分も学習する．数学 III をすでに学んだ学生は，大学数学の観点から数学 III を学び直すつもりで取り組めば，興味を持てると思う．第 5 章，第 6 章では，2 変数の関数の微分（偏微分）と重積分を扱う．これらは大学における本格的な微分積分学の基礎であり，多くの演習問題をこなして完全に身につけて

ほしい．なお，6 章は，教科書では 2 重積分までしか説明していなかったが，電磁気学等の専門科目で 3 重積分が頻出するため，いくつか問題を用意した．

微分積分学は意味の理解もさることながら，計算技術の習得に悩まされる学生が少なくない．実際，微分積分の計算は多様な関数が登場する上，複雑であり，話を聞いただけで理解できる人はほとんどいない．大学の入り口が多様化している昨今では，理工系学部学科の学生であっても，高校で微分積分を未修のまま入学してくることも珍しくない．だが，高等学校とは異なり，大学では 1 回の講義の進度が速く，どうしても計算練習に十分な時間をかけることができない場合が多い．しかし一方で，計算練習はとても重要である．教科書だけでなく，本問題集の問題を全て解き終えることができれば，大学における微分積分学の基礎をほぼ完璧にマスターしたと言ってよい．分からなかった箇所も，時間をかけて取り組めば，霧が晴れるように分かる瞬間がきっと訪れる．そうして，一歩一歩自分の手で理解したことは血となり肉となっていく．本書で鍛え上げた読者は，より専門的な科目を学ぶ際も，微分積分の計算に悩まされることはなくなっているであろう．

微分積分学の応用範囲は広大である．人類が数千年かけて到達した叡智の結晶「微分積分学」を活用する一助となれば幸いである．

2013 年 1 月

神永正博・藤田育嗣

目　　次

第 4 章　積　分

第 5 章　偏微分

第 6 章　2 重積分

1

第 1 章　指数関数と対数関数

§1.1　指 数 関 数

§1.1.1　指　　数

指数の拡張 ($a>0,\ p>0,\ m,n$: 正の整数)

$$a^0 \overset{\text{定義}}{=\!=} 1, \quad a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{定義}}{=\!=} \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-p} \overset{\text{定義}}{=\!=} \frac{1}{a^p}$$

指数法則 ($a>0,\ b>0,\ p,q$: 実数)

(i) $a^p a^q = a^{p+q}$

(ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $(ab)^p = a^p b^p$

§1.1.2　指 数 関 数

$a>1$ 　のとき　$x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ 　((狭義) 単調増加)

$0<a<1$ のとき　$x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ 　((狭義) 単調減少)

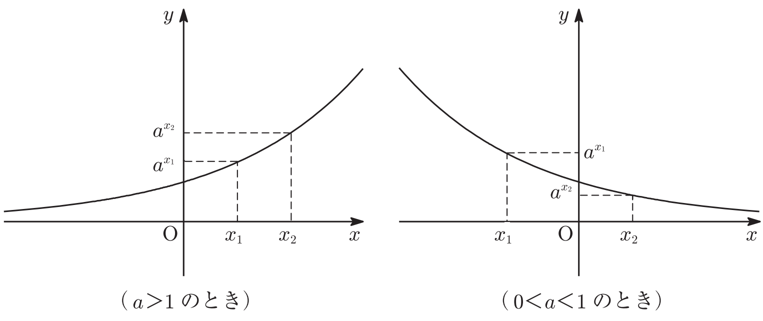

図 1.1　$y = a^x$

§1.2　対数関数

§1.2.1　対　数

対数 $(a > 0\ (a \neq 1),\ M > 0)$

$$m = \log_a M \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} a^m = M$$

§1.2.2　対数の性質

対数の基本 $(a > 0\ (a \neq 1))$

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$

対数の性質 $(a > 0\ (a \neq 1),\ M > 0,\ N > 0,\ k:$ 実数$)$

(i) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

(ii) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(iii) $\log_a M^k = k \log_a M$

§1.2.3　底の変換

底の変換公式 $(a,\ b,\ c:$ 正の数$,\ a \neq 1,\ c \neq 1)$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

§1.2.4 対数関数

$$a > 1 \quad \text{のとき} \quad x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 < \log_a x_2 \quad \text{((狭義)単調増加)}$$

$$0 < a < 1 \quad \text{のとき} \quad x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 > \log_a x_2 \quad \text{((狭義)単調減少)}$$

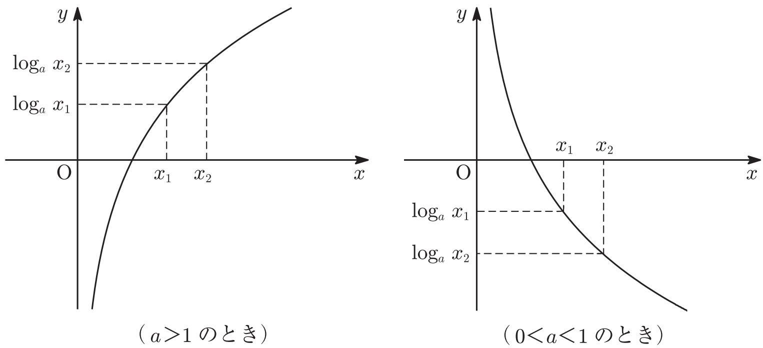

図 1.2 $y = \log_a x$

問題 A

1. 次の式を簡単にせよ $\langle$ §1.1.1 $\rangle$.

(1) aa^2a^3

(2) $(a^2)^3a^2$

(3) $a^{-1}a^2a^{-3}$

(4) $a^{-3}(a^2)^{-2}$

(5) $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{-3}}\right)^2$

(6) $a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{3}}$

(7) $\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(8) $\left(a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}$

(9) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}}{a^2b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-2}$

(10) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}\sqrt{a}}$

(11) $\left(\sqrt{a}\sqrt[3]{b}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(12) $\dfrac{\sqrt[4]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b^3}}$

2. 次の値を求めよ $\langle$ §1.1.1 $\rangle$.

(1) $64^{\frac{2}{3}}$

(2) $81^{-\frac{3}{4}}$

(3) $\left(25^{\frac{3}{4}}\right)^{-2}$

(4) $\left(216^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$

(5) $32^{-1.2}$

(6) $3^{\frac{3}{2}} \div 3^{-\frac{3}{2}}$

(7) $8^{\frac{5}{6}} \times 8^{-\frac{1}{2}} \div 8^{\frac{1}{3}}$

(8) $\sqrt[3]{16} \div \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}$

3. 次の値を求めよ $\langle$ §1.2.1 $\rangle$.

(1) $\log_5 625$

(2) $\log_9 3$

(3) $\log_{10} 10\sqrt{10}$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 32$

4. 次の式を簡単にせよ $\langle$ §1.2.2, §1.2.3 $\rangle$.

(1) $\log_2 6 + \log_2 \dfrac{2}{3}$

(2) $\log_3 40 - \log_3 20$

(3) $\log_3 \sqrt[4]{27}$

(4) $\log_{10} 28 - \log_{10} 35 + \log_{10} 125$

(5) $\log_5 \sqrt{45} + \log_5 \dfrac{5}{3}$

(6) $3\log_2 3 - 2\log_2 \sqrt{6} + \dfrac{1}{2}\log_2 12$

(7) $\log_{64} 32$

(8) $\log_3 8 \cdot \log_2 9$

(9) $\log_2 \dfrac{1}{9} \div \log_9 \dfrac{1}{2}$

(10) $\log_2 6 - \log_4 9 - \log_8 24$

5. 次の方程式，不等式を解け $\langle$§1.1.1, §1.1.2, §1.2.1, §1.2.4$\rangle$.

(1) $2^x = \dfrac{1}{32}$

(2) $3^{x-2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$

(3) $25^x > \sqrt{125}$

(4) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^x \leq 9^{-3}$

(5) $\log_3(x-1) = 2$

(6) $\log_2(3x-1) < 3$

問題 B

1. 次の数を小さい方から順に並べよ．

(1) $\sqrt[3]{16},\quad \sqrt[4]{32},\quad \sqrt[5]{64}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3^5}},\quad 27^{-\frac{1}{2}},\quad \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{-6}$

(3) $\log_2 \sqrt{3},\quad \dfrac{1}{2},\quad -\log_2 \dfrac{2}{3}$

(4) $-\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{3}{8},\quad \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 10,\quad -1$

2. 次の方程式，不等式を解け．

(1) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

(2) $9^{x+1} - 10 \cdot 3^x + 1 < 0$

(3) $2\log_2\left(x + \sqrt{2}\right) = -1$

(4) $\log_{10} x + \log_{10}(2x-1) = \log_{10}(2x+5)$

(5) $2\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \geq \log_{\frac{1}{3}}(-2x+7)$

(6) $\log_{\frac{1}{2}}(3-4x) - \log_{\frac{1}{2}}(2-x) < \log_{\frac{1}{2}}(1-2x)$

3.　次の数を $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$, n : 整数) の形に表したとき，n の値を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(1) 2^{30}　　(2) 6^{20}

(3) 0.3^{40}　　(4) 0.25^{25}

参考：(1), (2) の n の値は「何桁の数か」を表し，(3), (4) の n の値の絶対値 $|n|\,(=-n)$ は「小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか」を表す．