はしがき

本書の主題は無限連結 Riemann 面上の Hardy 族である．この方面の著書としては M. Heins による “Hardy Classes on Riemann Surfaces” (Heins [B19]) が 1969 年に発刊され無限連結性に関わる Hardy 族の話題が本格的に論じられた．1983 年にはその後の発展のいくつかをまとめた著者の報告 [B16] が出ている．本書は 1983 年の報告の主な部分に Fuchs 群の立場からの理論とそれに関連したその後の発展の一部を加えて解説を試みたものである．

Hardy 族は G. H. Hardy が単位円板上の正則函数の平均増大度を論じた 1915 年の論文 [36] に始まるというのが大方の認識である．この極て有用な函数族は Hardy 自身をはじめ，J. E. Littlewood, Frederic と Marcel の Riesz 兄弟，G. Szegö 等によって基礎が築かれ，複素函数論の分野を越えて膨大な研究文献があり，現在もなお活発な進展が続けられている．

Hardy 族の研究は単位円板の場合が発生の当初からその重要性と単純性から最も盛んに研究されてきた．それに続いて有限連結領域の場合にも高い関心が寄せられ多くの研究がある．それに対して，種数無限を含む無限連結の場合はどちらかと言えば研究の多くが一般論に関心があったようで，Hardy 族に限ってみれば充実した理論の建設には無理があると思わざるを得なかった．それで，1983 年の報告では「古典的 Hardy 族理論の稔ある発展が可能な無限連結 Riemann 面を求めること」を目標にして Parreau-Widom 型 Riemann 面 (以下，PW 面，PW 型と略称する) を導入し，その上の Hardy 族の基本性質の解明に努めた．幸い，その後この PW 型に関心を寄せられる方が増えているようである．最近では PW 型の Denjoy 領域が或る種の自己共軛作用素のスペ

クトルとの関連で話題になっている．このように，「PW 型」が理論のための理論を越えて関心を持たれていることは M. Parreau, H. Widom 両氏の炯眼(けいがん)が齎(もたら)した当然の結果ではあるが，望外の発展で嬉しいことである．

次に，内容について簡単に述べる．第 I 章では調和函数の Poisson 積分表示の抽象論として正値調和函数のベクトル束論的な扱い方を説明する．多重連結領域上の Hardy 族を円滑に扱うための仕組みとして我々は乗法的解析函数と Martin コンパクト化の概念を利用する．これらはそれぞれ第 II 章と第 III 章で説明する．第 IV 章では Hardy 族についての古典的理論の基本を境界対応に重点を置いて復習する．本論は第 V 章から始まる．まず，ここでは Parreau-Widom 型面の定義が Widom に従って述べられる．この定義が Parreau の与えたものと本質は変わらないことが“正則化”の方法で示された後，

Widom の基本定理　開 Riemann 面 $\mathcal{R}$ が PW 型であるための必要十分条件は $\mathcal{R}$ の基本群 $\pi_1(\mathcal{R})$ の任意の指標に対しこれを指標とする $\mathcal{R}$ 上の定数でない有界な乗法的正則函数が存在することである

が詳しく証明される．第 VI 章では Green 線の空間上の Dirichlet 問題が論じられ，PW 面に対しては Green 測度と Martin 測度の関係を問う Brelot-Choquet 問題の肯定的な解答が与えられる．第 VII 章の主題は順 (direct) と逆 (inverse) の二つの Cauchy 定理である．この中で，逆 Cauchy 定理は全ての PW 面で成り立ち，その逆も有界正則函数環が $\mathcal{R}$ の点を分離するという付帯条件の下で成り立つという意味で PW 面をほとんど特徴づける (林 [54])．一方，Cauchy の積分公式の精密化にあたる順 Cauchy 定理 (略して (DCT)) は一般の PW 面に対しては成り立たず，Beurling 型の不変部分空間定理の成立や，指標的保型函数に関する極値問題の解の指標に対する連続性などいくつかの性質と同等で，(DCT) の成立を条件として PW 面の一つの重要な部分族が規定される．この結果は林実樹廣氏の深い研究に負うものである．実際，同氏は 1970 年代半ばから 1980 年代半ばにかけて PW 型 Riemann 面の研究に精力的に取組んだ．この間二度の UCLA 滞在で T. W. Gamelin 教授の下で多くの成果を挙げたことは，PW 面理論にとって誠に幸いであった．(DCT) を満たす PW 面の部分族の重要さは Carleson が導入した等質集合の補集合とし

て得られるいわゆる等質 Denjoy 領域が (DCT) を満たす PW 領域であるという Jones-Marshall [64] や Sodin-Yuditskii [105] の結果からも推察される．我々が扱ってきた Riemann 面は全(すべ)て双曲型で，その普遍被覆面である単位円板を或る Fuchs 群で割って得られる．その意味で以上で述べた Riemann 面の複素函数論的なところは適当な Fuchs 群の言葉で全部再現できるはずである．第 VIII 章ではこれを具体的に実行した Pommerenke の理論を解説した．第 IX 章は Fuchs 群的な話の続きで，Forelli の射影を説明する．主な応用としては，Cauchy-Read の定理の Earle-Marden の証明，等質 Denjoy 領域に関する Carleson のコロナ定理の Jones-Marshall の証明を述べる．第 X 章は等質 Denjoy 領域上の Jacobi の逆問題に関する Sodin-Yuditskii の理論を解説する．自己共軛作用素のレゾルベント集合は Denjoy 領域であるから，この視点からの研究はあって当然で，実際 Hill の方程式のスペクトルの研究等が地道に続けられてきたが，それを等質集合をスペクトルとする Jacobi 行列を対応する Denjoy 領域の PW 性と結びつけて解析し，さらに (DCT) 条件の成立を発見して Jacobi の定理の無限次元版を完成したのは Sodin-Yuditskii の美しい仕事である．以上では，PW 面の持つさまざまな状況を述べて，無限連結であっても有限連結とそれほど変らぬ感覚で扱えることを見てきた．第 XI 章では PW 面から離れて Hardy 族による平面領域の分類問題を述べる．ここでは，無限種数の Riemann 面 (いわゆる Myrberg 面) を利用した Heins の分類表のほとんどが平面領域のみを使っても再現できることが示される．これは Hardy 族から見たとき，平面領域は想像以上に複雑になり得ることを示している．さらに，付録として，本文中の記号の説明をかねて若干進んだ予備知識をまとめておいたので必要に応じて利用していただきたい．もちろん，これだけでは間に合わないので，本文中でも参考書を適宜紹介した．

本書の主題である Hardy 族に関連する話題に著者が初めて興味を持ったのは 1962 年から 1964 年まで Berkeley の California 大学に滞在した折のことある．1962 年の秋学期には Henry Helson 先生が “Selected Topics in Analysis” という講義題目で Helson-Lawdenslager 理論を講義されたが，これが著者が出会ったアメリカでの最初の本格的な数学であった．当時は所謂(いわゆる)函数環論の発展期で Berkeley でも 1962–63 学年の春学期から John Kelley 先生を中心とす

る函数環セミナーが始まり，William Bade, Errett Bishop, Henry Helson の諸先生が常時参加され，活気に溢れていた．$C(\mathbb{T})$ の不変部分空間を一緒に勉強した T. P. Srinivasan とは Helson 先生のご講義がご縁の始まりだったが，同氏は Kelley セミナーにもよく登場し，「これは昨夜(ゆうべ)考えたことだが」というのが口癖だったことを懐かしく思い出す．一方，Riemann 面とは Bishop 先生から Voichick の論文 [110] のプレプリントを頂いたのが長いお付合の始りであった．1983 年報告の序文で触れたことは割愛するが，ここにお名前を挙げない多くの方々のお蔭を蒙ってきたことを記しておきたい．

幸い 1990 年代に入ってから，PW 面上の Hardy 族理論は Carleson の等質集合をスペクトルとする作用素研究の有力な手段として注目され，その関連で 1983 年の報告の結果 (特に，順 Cauchy 定理に関する林実樹廣氏の研究) も単位円板とその上の Fuchs 群を基本とする Pommerenke 理論の枠組みに翻訳されて基本的な役割を演ずるようになった．それで，この方面の基礎と現況の若干を含めることにした．甚だ不十分ながら何かのお役に立てれば幸いである．

本書の執筆は内田老鶴圃社長内田学氏のお勧めによるものである．安請合で始めたものであったが，勉強の空白を埋める作業は当然のことながら難航し，行間が読めずに時間だけを空費した感が強い．それでも，著者の疑問に答えていただいた北海道大学の林実樹廣教授，Tel Aviv 大学の Mikhael Sodin 教授のご親切と茨城大学数理科学科の皆さんのご援助は大きな励みになった．

遅々として進まぬ著者を暖かく見守っていただいた内田老鶴圃会長内田悟氏，原稿の細部まで多大な労を厭わずご検討いただき多くの貴重な示唆を与えて下さった内田老鶴圃編集部の笠井千代樹氏，さらには内田社長の十年以上に亘る辛抱強い励ましもあって何とかここまで辿り着いたというのが実感である．特に記して深く感謝の意を表する次第である．

平成 22 年 8 月

水戸にて

荷見　守助