関数解析入門 (線型作用素のスペクトル) の正誤表

(2019 年 1 月 15 日作成，2023 年 5 月 15 日更新)

- 63 頁, 下から 1 行目　「$r(V)=0$ を満たす作用素を一般冪零(いっぱんべきれい)であるという」
⇒「なお，$\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}=0$ を満たす作用素 T を一般冪零(いっぱんべきれい)であるという」

(あとがき (1) 参照)

- 74 頁, 下から 9 行目　「$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = f(\sigma(A))$」⇒「$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$」　(注：「$= f(\sigma(A))$」は重複．1 個を削除)
- 95 頁, 12 行目　「Λ の真部分閉集合」⇒「Λ_0 の真部分閉集合」
- 99 頁, 12 行目　「有向点族 $\mathscr{F}$」 ⇒ 「有向点族 $\mathscr{D}$」
- 102 頁, 下から 9 行目　「$C(\sigma(A))$」⇒「$C(\sigma(U))$」
- 121 頁, 5 行目　「$(\lambda-\mu)$」⇒「$(\mu-\lambda)$」
- 121 頁, 8 行目　「λ を $\rho(T)$」⇒「$\lambda\in\rho(T)$」
- 121 頁, 下から 10 行目から最終行まで　　定理 7.16 と証明は誤り．次の 10 行で置き換える．

　非有界線型作用素のスペクトルは，空集合である場合，$\mathbb{C}$ 全体である場合，どちらでもない場合，のすべてが可能である．ここではスペクトルが空集合である作用素 (これは必然的に閉作用素である) の特徴を述べる．

定理 7.16　H を無限次元のヒルベルト空間とする．

　(a)　T は H 上の線型作用素で $\sigma(T)=\emptyset$ を満たすものと仮定する．このときは，T の逆作用素 $S=T^{-1}$ (存在して有界) は一般冪零である．

　(b)　$S\in\mathscr{B}(H)$ は一対一かつ一般冪零であると仮定する．このときは，H 上の閉線型作用素 T で $\sigma(T)=\emptyset$ かつ $S=T^{-1}$ を満たすものが存在する．

　この定理は非有界作用素の問題を有界作用素の問題に転換する一つの仕組みを示すものとして有効であると思われる．

(あとがき (2) 参照)

- 165 頁, 8 行目　「$\sum_{n=1}^{\infty}$」⇒「$\sum_{n=0}^{\infty}$」(注：2 箇所とも変更)
- 186 頁, 下から 2 行目　「(2) のフーリエ変換」⇒「(3) のフーリエ変換」
- 191 頁, 11 行目　「すれは」 ⇒ 「すれば」
- 223 頁, 下から 2 行目　「1906 年」 ⇒ 「 1910 年」
- 228 頁, 18 行目　「*theorie*」 ⇒ 「*Theorie*」

あとがき

(1)　作用素 T が一般冪零であることの正確な定義は修正命題で示したものである．T のある冪 T^n $(n \geq 1)$ が零 (作用素) となるとき冪零であるというが，一般冪零はこの冪零の概念の拡張である．

記号について注意すれば，本書では $r(T)$ は作用素 T のスペクトル半径の定義である (39 頁，定義 3.9)．一方，$r(T)$ を極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ を表す記号とすることは一般的である (岩波数学辞典)．この後者の立場では $r(T) = 0$ は一般冪零の意味であるが，本書の立場では，$r(T) = 0$ はスペクトル半径が 0 であるというだけで，$\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$ の意味にはならない．ブーリン・ゲルファント公式 (定理 3.10) があって初めてこの意味になる．元の表現には定義の混同があった．本書には極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ を表す記号はない．

なお，一般冪零は generalized nilpotent の訳語でゲルファントの論文 [10] (ただし，ドイツ語) でも使われているものである．近頃は quasinilpotent (準冪零) がよく使われるが，$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$ を定義とする著者と $\sigma(T) = \{0\}$ を定義とする著者があっていささかまぎらわしい．nilpotent の発展変化と思えば冪乗の方が本筋なのだろうと思うが，理屈どおりには行かないらしい．

(2)　定理 7.16 と証明の欠陥については西川寛人氏 (京大) の出版社宛てメール (令和 3 年 6 月 17 日付) によるご指摘で判明したもので，この修正定理はその見直しの結果である．同氏の御厚意に深謝する．

スペクトルが空である線型作用素 (必然的に閉である) の例は以前から知られていたが (例えば，ダンフォード・シュワルツ [B9, Exercise VII.10.1(a)])，練習問題の話題以上には議論が深まることはなかったように見える．

一般の非有界線型作用素のスペクトルについては，作用素の基礎理論を扱う標準的な教科書について見るかぎり，スペクトルを如何に利用するかに焦点が当てられ，スペクトルのない場合については練習問題の話題以上のものではなかった．本書の演習問題 7.6 もダンフォード・シュワルツ (上記) と同じものを取扱っていたが，本論と結びつかなかったのは意識に問題があったのであろう．

この誤謬の訂正にあたっては，スペクトルのない場合も重視する立場に立って非有界閉作用素のスペクトルの有無の判別法を検討した．その結果が正誤表に述べた修正定理である．その過程で同章の演習問題の最終が反例であることに気づいた．整理の不行届きをお詫びする次第である．

なお，修正定理の証明および関連する詳細は下記として公表されている：

M. Hasumi, M. Seto, *Linear operators with empty spectrum*, Kyushu J. Math. **77** (2023), 63–73, `doi:10.2206/kyushujm.77.63`

(3)　この正誤表はその多くを読者諸賢のご指摘に負うものである．ここに記して謝意を表するとともになお一層のご叱正をお願いする次第である．

以上