# はしがき

本書はバナッハ空間およびヒルベルト空間上の線型作用素の基礎知識を作用素のスペクトルを標語としてまとめたもので，学部上級から大学院初年級向けの教科書であるが自習書としても十分役立つよう丁寧な説明を心がけた．

本書は一般の有界線型作用素の基礎知識を解説する第 1 部，ヒルベルト空間上の有界および非有界な自己共役作用素に焦点を絞った第 2 部，抽象的なバナッハ環の立場から主に有界な線型作用素を扱う第 3 部から構成されている．これらをさらに詳しく述べれば次の通りである．

まず第 1 部は五章から成る．第 1 章は本書全体への準備で，本書を読むために必要と思われる関数解析の基礎事項を記号の説明をかねて解説する．第 2 章からが本論で，ここではバナッハ空間上の線型作用素についての基礎概念として，連続性，有界性，作用素の双対と各種の収束などを説明する．ヒルベルト空間上の作用素については作用素の共役の概念を導入しその基本性質を述べる．さらに，共役作用に着目して作用素を分類し，自己共役または対称，正規，ユニタリーの概念を導入する．特に，自己共役作用素には大小の概念が定義され，シュワルツの不等式や有界単調列の収束といった，実数の世界でおなじみの性質が再現される．第 3 章では本書の主役である作用素のスペクトルが登場する．バナッハ空間 $X$ 上の作用素 $T$ のスペクトルとは $T$ が定数倍の成分を含むかどうかというテストによる成分分析表である．複素数 $\lambda$ が $T$ の固有値ならば $T$ はもちろん $\lambda$ 倍の成分を持つが，$\lambda$ が固有値でなくても $T$ が $\lambda$ 倍の成分を含むことはあり得る．これは $\lambda I - T$ が有界な逆作用素を持つかどうかで判

定される．逆作用素を持つような $\lambda$ の全体が $T$ のレゾルベント集合 $\rho(T)$ で，その補集合が $T$ のスペクトル $\sigma(T)$ である．この章ではスペクトルの基本性質とスペクトルの分類を述べた後，$\sigma(T)$ が空でないコンパクト集合であることやスペクトル半径 $r(T)$ に関するブーリン・ゲルファント公式を示す．ヒルベルト空間については特に正規作用素について $r(T) = \|T\|$ が成り立つこと，自己共役作用素についてはスペクトルが実数であることなどを説明する．第 4 章の主題はコンパクト作用素である．ここでは関数解析学の初期の典型的理論として名高いコンパクト作用素のリース・シャウダー理論を解説する．第 5 章は作用素を関数に代入して新しい作用素を作り出す関数法 (functional calculus) の基本を解説する．一般の有界作用素 $T$ についてはそのレゾルベントが正則関数であることを利用するリース・ゲルファント・ダンフォードの理論が基本であるが，ヒルベルト空間上の自己共役作用素のような「対角化可能」な作用素については正則性は必要がなく，スペクトル $\sigma(T)$ 上の連続関数に $T$ を代入する連続関数法が成立する．これは第 2 部の自己共役作用素のスペクトル分解理論で役に立つ．

第 2 部の三章はヒルベルト空間上の自己共役作用素に的を絞ってやや詳しく解説する．第 6 章の目的は有界な自己共役作用素のスペクトル分解定理とその応用である．これについては掛け算作用素型と直交射影を値とする測度を用いるスペクトル測度型の二つを述べる．この前者は作用素をある関数の掛け算として表そうということで，感覚的でわかりやすいが，リースの表現定理を仲介とする積分 (測度) の話が避けられないので，初学者には我慢が必要かもしれない．それで第 6 章の初めと付録でリースの表現定理の微積分的な解説を試みた．第 7 章はヒルベルト空間上の非有界線型作用素への入門でグラフを利用する定義，特に閉作用素，共役作用素，対称作用素，自己共役作用素などが主な概念である．非有界な作用素の解析には有界な作用素への転換が有力な手法であるが，これについては一般の閉作用素を有界な自己共役作用素に転換するフォン・ノイマンの定理を証明する．非有界な自己共役作用素についてはこれをユニタリー作用素と一対一に対応させるケーリー変換を説明する．第 8 章では非有界な自己共役作用素のスペクトル分解定理を述べる．ここでは，無限次元ヒルベルト空間 $H$ を可算個の閉部分空間 $M_n$ に直交分解したとき，各 $M_n$ 上で

指定された有界自己共役作用素に等しい $H$ 上の自己共役作用素が一意に存在するというリース・ロルチの補題を基本原理として議論を進める.

第 3 部の三章ではバナッハ環の入門的な解説と作用素への応用を述べる. バナッハ環は原則として単位元を持つものとする. 第 9 章では, バナッハ環の定義と基本性質を述べた後, バナッハ環の元のスペクトルとレゾルベントを定義し, 作用素に対して成り立つ諸性質を抽象的に再現する. 特に, スペクトルが空でないコンパクト集合であることとスペクトル半径に関するブーリン・ゲルファント公式を証明する. 第 10 章では可換なバナッハ環のゲルファント変換の理論を解説する. その基本は零でないすべての元が可逆であるような複素バナッハ環 (非可換でもよい) は複素数体と同型であるというマズール・ゲルファントの定理で, これから可換バナッハ環のゲルファント変換が構成される. 第 11 章はヒルベルト空間上の有界線型作用素の環をモデルとしたバナッハ環として $C^*$ 環を説明する. 特に可換な $C^*$ 環はコンパクト空間上の連続関数全体の環に等長同型であるというゲルファント・ナイマルクの定理とその正規作用素のスペクトル分解への応用を述べる.

なお, 付録として一次元集合の上のリースの表現定理の簡単な解説とベクトル値正則関数の定義と基本性質を述べた. また, 参考文献について極めて主観的なメモを追加した. なお, 各章には少数の演習問題をつけた. 内容は様々で普通の練習問題, 本文の説明の補充, 発展的な話題, 等々を無秩序に並べてある. 巻末には演習問題への略解またはヒントを置いたが, あまり当てにしないで欲しい. 本文・問題とも比較的進んだ話題には $^*$ をつけたので, 必要に応じて利用して欲しい.

本書は著者の一人荷見による『関数解析入門—バナッハ空間とヒルベルト空間』 (以下「入門」と略す) の続編の形をとっているが,「入門」の知識がなくても不便がないよう必要に合わせて説明の程度を加減した. 証明の細部までは要(い)らないことが多いので, 不都合はあまりないと思われるが, 詳しい解説については「入門」または手近の参考書で補っていただきたい. この本が関数解析の地道な勉強に取り組む学生諸君の一助になれば幸いである.

最後に本書の成り立ちについて簡単に触れる.「入門」の巻末には「続いてはバナッハ空間およびヒルベルト空間上の線型作用素の固有値理論を一応身につ

けた後，将来の方向に合わせて勉強の方向を選んでゆくというのが標準的であろう」とあるように，当時線型作用素のスペクトルを主題とする続編に期待していたことは事実である．しかし，実際にはその機運にはなかなか恵まれなかった．最近になって，何かの雑談が契機で，一応のプログラムを立ててこの本の原型を作る荷見と瀬戸の共同作業が始まった．2014 年の秋の頃である．作業は断続的ではあるが順調に進み原稿の枚数は捗（はかど）ったが当初の目論見よりはかなり難解なものになってしまった．昨年の夏にこれも偶然の話の成り行きでやさしい「ミニコース」を作ってみることになり，共通の友人の長に相談したところ幸いにも学生に読ませている講義録があるということで，学生の顔が見える教科書が急にまとまることになった．

本書は三名の著者が持ち寄った資料を取捨選択して構成したものである．執筆の分担を基礎となる資料との対応でいえば，第 1 部は長，第 2 部は瀬戸，第 3 部は荷見ということで最初の下書きが作られたが，三名による各段階の検討推敲を経て最終的には荷見が全体をまとめる形でこの作業は終了した．

本書の出版にあたっては内田老鶴圃社長内田学氏に終始お世話になった．また同社編集部の笠井千代樹氏には原稿を細部に亘り綿密に検討していただいた．特に記して厚くお礼を申し上げる次第である．

平成 30 年 7 月

著　　者