計算力をつける

微分方程式

藤田育嗣・間田　潤

共著

内田老鶴圃

まえがき

本書は, 数学を道具として用いる理工学系学生を対象とした微分方程式の入門書である. 微分方程式の中でも, 基本的で広く応用されている「1 階微分方程式」と「定数係数 2 階線形微分方程式」に的を絞って解説した. 本書に登場する「定理」(あるいは「解法」) は, これらの微分方程式を具体的に解く方法が分かる形をしている. 定理の証明等における「理論」の部分については, **微分方程式を解くことを一番の目的としている**ので, その定理等がどうしてそういう形をしているのかということが分かる程度の簡潔な解説を心がけた (本書では [コメント] と称している). 一方で, [コメント] 内の式変形や例題の解答等の「計算」の部分については, 微分積分の計算に十分に慣れていない状態で微分方程式を学習する学生がいることにも配慮し, 1 変数の微分積分の計算であっても, できる限り丁寧な記述を心がけた.

第 0 章では, 微分方程式に関する基本事項と, 最も基本的な微分方程式 $y^{(n)} = f(x)$ の解法を学ぶ.

第 1 章では, **1 階微分方程式の解法**を学ぶ. この章に登場する微分方程式は, 変数分離形, 同次形, 1 階線形, 完全微分形の 4 種類である.

第 2 章では, **定数係数 2 階線形微分方程式の解法**を学ぶ. 特に, 右辺が整式, 指数関数, 三角関数といった初等関数である場合に解けるようになることを目標とする. 後半では**演算子法による解法**を学び, 最後に**連立微分方程式の解法**を学習する.

第 3 章では, **級数を利用した解法**を学ぶ. この章では,「こういう解法もある」ということを参考程度に学ぶことが目的である.

付章では, 微分方程式の**物理への応用**として「物体の運動」と「電気回路」を学習する. この付章の扱いも本書の特徴の一つである. 第 0 章から第 3 章では微分方程式を解くということに専念するために物理現象については全く触れず, この付章でまとめて紹介している. 一人でも学習できるように,「物体の運動」と「電気回路」に関する基本的な用語を概説し, 読み進めるために必要な微分方程式の定理等については逐一脚注に参照すべき本文の該当箇所を記した.

他の「計算力をつける」シリーズ（内田老鶴圃）と同じく, 本書でも例題のすぐ後に, その例題の解法を参考にすれば解くことができる問題を配置した. 自ら問題を解くことで初めて微分方程式を解くことができるようになるので, できるだけ多くの問題を解いてもらいたい. 第 1 章と第 2 章には章末問題をつけ, そこには, 本文中の問題と同等もしくは少しだけ難しい問題を数多く取り上げた. 加えて, 本文では触れていない微分方程式として, 第 1 章章末問題にはベルヌーイの微分方程式と積分因子に関する問題を, 第 2 章章末問題には 3 階以上の高階線形微分方程式に関する問題を, それぞれ用意した. これらの問題には解法のヒントを与えた. 章末問題にも積極的に取り組んで, 是非, **微分方程式**を解くということを自分のものにしていただきたい.

最後に, 本書を「計算力をつける」シリーズの一巻として刊行することを快諾してくださった,「計算力をつける」の名付け親である東北学院大学工学部の神永正博氏, 本書を書く機会をくださった内田老鶴圃の内田学社長, 何度も著者のもとに足を運び内田社長と共に適切な助言と校正をしてくださった笠井千代樹編集長, および, 物理への応用に関して快く質問に答えてくださった日本大学生産工学部の浅賀朋子氏, 付章全般を丁寧に査読してくださった日本大学生産工学部の姫本宣朗氏, 山城昌志氏に心より感謝します.

2011 年 11 月

藤田育嗣・間田　潤

目　　次

第0章

微分方程式とは？

微分方程式とは，独立変数 x と未知関数 $y = y(x)$ およびその導関数 $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ を含む方程式

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

のことである．

上の式のように n 階までの導関数を含む微分方程式を $\boldsymbol{n}$ **階微分方程式**と呼ぶ．

例 0.1

(1)　$y' = 2x - 1$　（1 階微分方程式）

(2)　$(y')^2 - xy = \cos x$　（1 階微分方程式）

(3)　$y'' + 5y' + 3y = 0$　（2 階微分方程式）

微分方程式を満たす関数 $y = y(x)$ を，その**微分方程式の解**と呼ぶ．

例題 0.2

次の微分方程式の解を求めよ．

$$y' = 2x - 1$$

【解】　両辺の不定積分から，微分方程式の解

$$y = \int (2x - 1)\ dx$$

$$= x^2 - x + C \qquad (C：任意定数)$$

が求まる.

［**コメント**］ 実際, $y = x^2 - x + C$ が与えられた微分方程式 $y' = 2x - 1$ を満たすことは, 容易に確認できる. ■

問題 0.1

次の微分方程式の解を求めよ.

(1) $y' = \dfrac{1}{2}$　　(2) $y' = x^2 - 2x + 4$

(3) $y' = \sqrt{x}$　　(4) $y' = \sin 2x$

(5) $y' = \cos 2x$　　(6) $y' = e^{2x}$

例題 0.3

例題 0.2 の解で, 条件

$$x = 0 \text{ のとき } y = 1 \tag{0.1}$$

を満たすものを求めよ.

【解】 例題 0.2 の解

$$y = x^2 - x + C \tag{0.2}$$

が条件 (0.1) を満たすとすると, $1 = 0^2 - 0 + C$ より $C = 1$ が得られる. よって, 求める解は

$$y = x^2 - x + 1 \tag{0.3}$$

である.

一般に, 1 階微分方程式 $F(x, y, y') = 0$ において,

$$x = a \text{ のとき } y = b$$

の形の条件を**初期条件**といい, 初期条件を満たす解を求める問題を**初期値問題**と呼ぶ.

問題 0.2

次の微分方程式を, ( ) 内の初期条件のもとで解け.

(1) $y' = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ ($x = 0$ のとき $y = 1$)

(2) $y' = x^2 - 2x + 4$ $\qquad$ ($x = 3$ のとき $y = 9$)

1 階微分方程式の解で, (0.2) のように任意定数 C を含む解を**一般解**と呼び, (0.3) のように特定の値を任意定数に代入して得られる解を**特殊解**（または **特解**）と呼ぶ.

また, 一般解を求めることを**微分方程式を解く**という.

ここまでで説明してきた 1 階微分方程式と同様に, n 階微分方程式 $y^{(n)} = f(x)$ の解も不定積分を n 回繰り返すことにより得られる. つまり, 次の定理 0.4 が成り立つ.

定理 0.4 $y^{(n)} = f(x)$ の一般解

$y^{(n)} = f(x)$ の一般解は,

$$y = \underbrace{\int\!\!\int \cdots \int}_{n \text{ 個}} f(x)\ dxdx \cdots dx$$

を計算することによって得られる.

［**コメント**］ 不定積分の計算を 1 回行うごとに 1 個の任意定数が出てくるので, 計算結果には n 個の任意定数が含まれる. ■

第 1 章

1 階微分方程式

本章では, 1 階微分方程式 $F(x, y, y') = 0$ を扱う. したがって, 一般解は

$$y = y(x, C)$$

と 1 個の任意定数を含む.

1.1　変数分離形

変数分離形

1 階微分方程式の中で

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{1.1}$$

の形に書けるものを**変数分離形**と呼ぶ.

$g(y) \neq 0$ ならば,

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

と変形でき, さらに両辺を x で積分すると,

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx$$

が得られる. 左辺に置換積分を用いると

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{1}{g(y)}\,dy \quad \longleftarrow$$

$y = y(x)$ に注意し, 置換積分

$$\int \varphi(y)\frac{dy}{dx}\,dx = \int \varphi(y)\,dy$$

を $\varphi(y) = \dfrac{1}{g(y)}$ として用いる

が分かるので,

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

を得る．あとは, 両辺の積分を実際に計算することによって, 任意定数を 1 つ含む x と y の関係式, つまり, 一般解が得られる．

以上の解法は, 次のようにまとめることができる．

変数分離形の解法

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$\downarrow$ 両辺に $\dfrac{dx}{g(y)}$ をかける[1]

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

$\downarrow$ 積分記号 $\displaystyle\int$ を書き加える

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

ちなみに, $g(y) = 0$ のときは, $g(y_0) = 0$ となる y_0（定数）があれば, $y = y_0$ は微分方程式 (1.1) の解である[2]．この解 $y = y_0$ は, 微分方程式の一般解に含まれている（特殊解である）場合と, 含まれていない（特異解である）場合がある．

変数分離形の一般解について改めて書けば, 次の定理 1.1 を得る．

定理 1.1　変数分離形の一般解

変数分離形 (1.1) の一般解は,

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx \tag{1.2}$$

を計算して得られる x と y の関係式である．

---

*1　dx, dy を形式的に文字式と考えて計算する．

*2　$y_0' = 0 = f(x)g(y_0)$ より, $y = y_0$ は微分方程式 (1.1) を満たす．

2

第2章 定数係数2階線形微分方程式

本章では 2 階微分方程式 $F(x, y, y', y'') = 0$ の中でも, y, y', y'' の係数が定数であるような線形方程式（y, y', y'' についての 1 次方程式）

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (p,\, q : \text{定数}) \tag{2.1}$$

を扱う. この方程式を**定数係数 2 階線形微分方程式**と呼ぶ. 一般解は

$$y = y(x, C_1, C_2)$$

と 2 個の任意定数を含む.

特に, (2.1) において, $f(x) \equiv 0$ [*1] である微分方程式

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2.2}$$

を**同次 2 階微分方程式**（定数係数同次 2 階線形微分方程式）と呼ぶ.

これに対して, (2.1) において, $f(x) \not\equiv 0$ [*2] である微分方程式を**非同次 2 階微分方程式**（定数係数非同次 2 階線形微分方程式）と呼ぶ.

本章では 2 階微分方程式を主に扱うので, しばしば 同次 2 階微分方程式を**同次方程式**, 非同次 2 階微分方程式を**非同次方程式**と呼ぶ.

2.1　解の構造

ここで,

$$\begin{cases} \text{非同次方程式 (2.1) の特殊解} & : \quad y = g(x) \\ \text{同次方程式 (2.2) の一般解} & : \quad y = h(x, C_1, C_2) \quad (C_1, C_2 : \text{定数}) \end{cases}$$

---

*1 $f(x) \equiv 0$ は, すべての x について $f(x) = 0$ であることを表す.

*2 $f(x) \not\equiv 0$ は, $f(x) \neq 0$ となる x が少なくとも 1 つ存在することを表す.

と書くことにすると, 2 つの解の和

$$y = g(x) + h(x, C_1, C_2)$$

は,

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (g+h)'' + p(g+h)' + q(g+h) \\ &= (g'' + h'') + p(g' + h') + q(g+h) \\ &= (g'' + pg' + qg) + (h'' + ph' + qh) \\ &= f(x) + 0 = f(x) \end{aligned}$$

より, 非同次方程式 (2.1) の一般解になっていることが分かる*3. まとめると, 次の定理 2.1 が成り立つ.

定理 2.1

非同次方程式

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{2.3}$$

と, 同次方程式

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2.4}$$

について,

$$\boxed{(2.3)\text{ の一般解}} = \boxed{(2.3)\text{ の特殊解}} + \boxed{(2.4)\text{ の一般解}}$$

が成り立つ.

---

*3 定数係数 1 階線形微分方程式 $y' + ky = f(x)$ においても, (1.8) で $g(x) = k$ とおき, $\int f(x)e^{kx}\,dx = F(x) + C$ とすれば,

$$\begin{aligned} \boxed{\text{一般解}} &= e^{-kx}\int f(x)e^{kx}\,dx = e^{-kx}\big(F(x) + C\big) \\ &= e^{-kx}F(x) + Ce^{-kx} \\ &= \boxed{\text{特殊解}} + \boxed{\text{同次方程式の一般解}} \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる.

3

第3章
級　数　解

本章では微分方程式の一般解がべき級数の形で書けることを仮定した解法を紹介する.

3.1　級数による解法

本節では, x の整式や e^x, $\sin x$, $\cos x$ などで表される「初等関数」を解にもつ微分方程式を想定し, その解法を考える.

微分積分学を学んだ人は, 関数 e^x, $\sin x$, $\cos x$ をべき級数の形に書き下すマクローリン展開（$x=0$ におけるテイラー展開）を見たことがあるだろう.

例 3.1　マクローリン展開

(1) $$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

(2) $$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\end{aligned}$$

解が級数の形で書けると仮定すると, 次のような手順で微分方程式を解くことができる.

微分方程式の級数による解法

(i) 微分方程式の一般解が,

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots + A_nx^n + \cdots \tag{3.1}$$

$$(A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots : \text{定数})$$

という級数の形で書けることを仮定する.

(ii) (3.1) を微分方程式に代入して, 係数 $A_0, A_1, A_2, \ldots$ を求める.

級数の形の解 (3.1) を**級数解**と呼ぶ. n 次の整式は, (3.1) の右辺で $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = 0$ としたものと考えることができる.

ただし, すべての微分方程式が級数解をもつわけではない. 級数解をもつための条件については, 3.2 節で簡単に触れることにする.

例題 3.2

級数解 (3.1) を仮定して, 次の微分方程式を解け.

$$3y' - 10y = 0$$

【解】 (3.1) を微分方程式の左辺に代入すると,

$$\begin{aligned}
3y' - 10y &= 3(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots + A_nx^n + \cdots)' \\
&\quad - 10(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots + A_nx^n + \cdots) \\
&= 3(A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \cdots + nA_nx^{n-1} + \cdots) \\
&\quad - 10(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots + A_nx^n + \cdots) \\
&= (3A_1 - 10A_0) + (6A_2 - 10A_1)x + \cdots \\
&\quad + \big(3(n+1)A_{n+1} - 10A_n\big)x^n + \cdots
\end{aligned}$$

が得られる. 右辺が 0 に等しくなるためには, 各項の係数が 0 にならなくてはならない. よって, $A_0, A_1, A_2, \ldots$ に関する等式

付章

物理への応用

第 0 章から第 3 章で扱った微分方程式の応用として, 本章では次を扱う.

物体の運動

- 等速直線運動
- 等加速度直線運動
- 単振動
- 強制振動

電気回路

- CR 回路
- LR 回路
- LC 回路
- RLC 回路

A.1　物体の運動

まず, 気をつけてもらいたいのは, 物理では用いる記号が意味をもつという点である.

例 A.1

物理量	単位	記号
位置（長さ）*[1]	メートル [m]	x
時間 time	秒 [s]	t
速度 velocity	メートル毎秒 [m/s]	v
加速度 acceleration	メートル毎秒毎秒 [m/s^2]	a
質量 mass	キログラム [kg]	m
力 force	ニュートン [N]	F

*[1] 位置については, 座標系で考えているので, x が使用される.

本節では, 例 **A.1** の記号を用いて解説する.

まず, 最も基本的な**直線運動**（直線上を動く物体の運動：図 A.1 参照）を考える. この物体が時刻 t には位置 x にいて, 時刻 $\tilde{t}$ には位置 $\tilde{x}$ にいたとすると, この間の平均速度は

$$\frac{\tilde{x}-x}{\tilde{t}-t}$$

で計算される. 特に, 位置 x が時刻 t に従って変化するときには, x は t の関数 $x=x(t)$ であり, $\Delta t=\tilde{t}-t$ とおくと, $\tilde{x}=x(t+\Delta t)$ なので, 先ほどの平均速度の式は

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

と表せる. よって, 時刻 t での**速度**（瞬間の速度）$v(t)$ は,

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{dx(t)}{dt} \tag{A.1}$$

と位置の微分で与えられる. 物理の教科書では, 時間 t による微分をドットで表し, (A.1) を

$$v(t)=\dot{x}(t)$$

と書く場合がある.

同様にして $v(t)$ についても考えると, **加速度**（速度の瞬間変化率）$a(t)$ が

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

と速度の 1 階微分もしくは位置の 2 階微分で書ける*2.

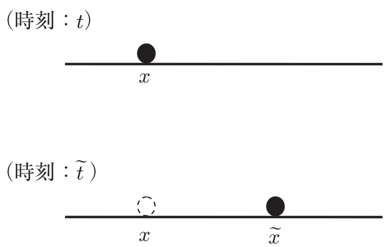

図 A.1　直線運動

*2 ドットの記法を用いると, それぞれ $a(t)=\dot{v}(t)$, $a(t)=\ddot{x}(t)$ と表される.

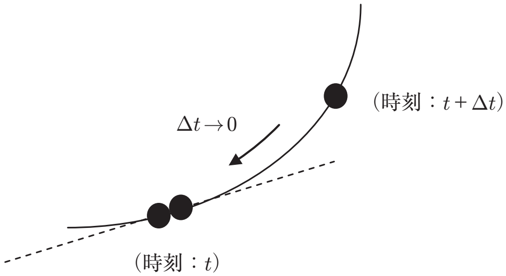

図 A.2　微小時間の運動

ここまでは, 直線運動を例に物体の運動を考えてきたが, 平面や空間における運動も瞬間的（$\Delta t \to 0$）には直線運動とみなすことができるので（図 A.2 参照),

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \qquad a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

は, 平面や空間における運動においても成り立つ.

ここで, 物体の運動をさらに考察するため, ニュートンの提唱した物理の基本法則を確認しておこう.

運動の 3 法則

第 1 法則（慣性の法則）
力を受けない物体は静止したままであるか**等速直線運動** *[3]を行う.

第 2 法則（運動の法則）
質量 m の物体に力が作用すると, 力の方向に加速度を生じる. 加速度の大きさは力の大きさに比例し, m に反比例する.

第 3 法則（作用反作用の法則）
物体 A が物体 B に力（作用）を及ぼすとき, 物体 A は物体 B から, 同じ大きさで反対向きの力（反作用）を受ける.

*[3] 物体が直線上を同じ向きに一定の速さで運動しているとき, この運動を等速直線運動と呼ぶ.

第1章

問題 1.1 (P. 12)： **(1)** $y = Ce^{x^2}$ **(2)** $y = -\dfrac{1}{\log(x-1)+C}$

(3) $y^3 = -\dfrac{1}{x^3+9x+C}$ **(4)** $y = Ce^{-\frac{4}{3}x\sqrt{x}} + 1$

(5) $y(\log y - 1) = \dfrac{1}{2}\cos x + C$ **(6)** $y = \tan(\sin^{-1} x + C)$

問題 1.2 (P. 13)： **(1)** $y = e^{x^2}$ **(2)** $y = -\dfrac{1}{\log(x-1)-1}$

(3) $y^3 = -\dfrac{1}{x^3+9x-9}$ **(4)** $y = e^{\frac{4}{3}(1-x\sqrt{x})} + 1$

(5) $y(\log y - 1) = \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{3}{2}$ **(6)** $y = \tan\left(\sin^{-1} x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

問題 1.3 (P. 16)： **(1)** $y^2 = 2x^2 \log x + Cx^2$ **(2)** $y = Ce^{\frac{x^2}{2y^2}}$

(3) $y = C(x^2 - y^2)$ **(4)** $3y^2 + 2xy - 2x^2 = C$

(5) $y^2 = x^2\left\{(\log x + C)^2 - 1\right\}$ **(6)** $e^{\frac{y}{x}} - e^{-\frac{y}{x}} = \log x + C$

問題 1.4 (P. 17)： **(1)** $y^2 = 2x^2 \log x + x^2$ **(2)** $y = e^{\frac{x^2}{2y^2} - \frac{1}{2}}$

(3) $y = x^2 - y^2$ **(4)** $3y^2 + 2xy - 2x^2 = -1$

(5) $y^2 = x^2\left\{\left(\log x + \sqrt{2}\right)^2 - 1\right\}$ または $y^2 = x^2\left\{\left(\log x - \sqrt{2}\right)^2 - 1\right\}$

(6) $e^{\frac{y}{x}} - e^{-\frac{y}{x}} = \log x + e - e^{-1}$

問題 1.5 (P. 20)： **(1)** $y = (x-1)\left\{\log(x-1) + C\right\} - 2$

(2) $(y+1)e^{\frac{x}{y+1}} = C$ **(3)** $\dfrac{(x+2)^2(x-y+5)^7}{(3x+2y)^4} = C$

(4) $5x^2 + 8xy - y^2 + 28x - 28y = C$

問題 1.6 (P. 20)： **(1)** $y = (x-1)\log(x-1) + 2x - 4$

(2) $(y+1)e^{\frac{x}{y+1}} = 2e^{\frac{1}{2}}$ **(3)** $\dfrac{(x+2)^2(x-y+5)^7}{(3x+2y)^4} = 4096$

(4) $5x^2 + 8xy - y^2 + 28x - 28y = 12$

問題 1.7 (P. 23)： **(1)** $y = e^{-x}(x + C)$ **(2)** $y = x - 1 + Ce^{-x}$

(3) $y = -2x^3(\log x + C)$ **(4)** $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{xe^x}$

問題 1.8 (P. 23)： **(1)** $y = e^{-x}(x + e - 1)$ **(2)** $y = x - 1 + e^{1-x}$

(3) $y = -2x^3\left(\log x - \dfrac{1}{2}\right)$ **(4)** $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{xe^{x-1}}$

問題 1.9 (P. 28)： **(1)** $\dfrac{1}{2}x^2 + xy + x - \dfrac{1}{2}y^2 = C$

(2) $\dfrac{1}{3}x^3 + xy^2 - y = C$ **(3)** $\dfrac{3}{2}x^2 - 2x^2y + 5x + \dfrac{1}{3}y^3 = C$

(4) $\log x - \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{2}y^2 = C$

問題 1.10 (P. 28)： **(1)** $\dfrac{1}{2}x^2 + xy + x - \dfrac{1}{2}y^2 = 6$

(2) $\dfrac{1}{3}x^3 + xy^2 - y = 11$ **(3)** $\dfrac{3}{2}x^2 - 2x^2y + 5x + \dfrac{1}{3}y^3 = 1$

(4) $\log x - \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{2}y^2 = \dfrac{3}{2}$

【第 1 章 章末問題】 (P. 30)

[**1**] (1) $\dfrac{y}{y^2-1}y' = -\dfrac{1}{x^2-1}$ より変数分離形なので,

$$\int \frac{y}{y^2-1}\,dy = -\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$
$$\frac{1}{2}\log(y^2-1) = -\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1} + C$$
$$\log(y^2-1) = \log C\frac{x+1}{x-1} \qquad (e^{2C} \to C)$$
$$\therefore\ \ y^2 = C\frac{x+1}{x-1} + 1$$

(2) $e^{-2y}y' = \dfrac{1-e^x}{e^x}$ より変数分離形なので,

$$\int e^{-2y}\,dy = \int \frac{1-e^x}{e^x}\,dx$$
$$\int e^{-2y}\,dy = \int \left(\frac{1}{e^x} - 1\right)\,dx$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2y} = -e^{-x} - x + C$$

$$\therefore\ \ e^{-2y} = 2e^{-x} + 2x + C \qquad (-2C \to C)$$

$$\left(\text{または}\ \ y = -\frac{1}{2}\log\left(2e^{-x} + 2x + C\right)\right)$$

(3) $y' = \dfrac{\frac{y}{x}(1+\frac{y^2}{x^2})}{1-\frac{y^3}{x^3}}$ より同次形なので, $u = \dfrac{y}{x}$ とおくと, $y' = \dfrac{u(1+u^2)}{1-u^3}$

かつ $y' = u + xu'$ より,

$$xu' = \frac{u(1+u^2)}{1-u^3} - u$$

$$xu' = \frac{u^3(1+u)}{1-u^3}$$

$$\int \frac{1-u^3}{u^3(1+u)}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \left(\frac{1-u+u^2}{u^3} - \frac{2}{1+u}\right) du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{u} + \log u - 2\log(1+u) = \log x + C$$

$$-\frac{x^2}{2y^2} + \frac{x}{y} + \log\frac{y}{x} - 2\log\left(1+\frac{y}{x}\right) = \log x + C$$

$$\therefore\ \ \frac{x(2y-x)}{2y^2} + \log\frac{y}{(x+y)^2} = C$$

(4) $y' = \dfrac{\frac{y}{x}}{1+\log\frac{y}{x}}$ より同次形なので, $u = \dfrac{y}{x}$ とおくと, $y' = \dfrac{u}{1+\log u}$

かつ $y' = u + xu'$ より,

$$xu' = \frac{u}{1+\log u} - u$$

$$xu' = -\frac{u\log u}{1+\log u}$$

$$\int \frac{1+\log u}{u\log u}\,du = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\log(u\log u) = -\log x + C$$

$\nwarrow$ $\dfrac{d}{du}\log(u\log u) = \dfrac{1+\log u}{u\log u}$ に注意