計算力をつける

線形代数

神永正博・石川賢太
共著

内田老鶴圃

まえがき

本書は,「使う」立場に立って書き下ろした線形代数の入門書である．本書では，線形代数の基本事項にのみターゲットを絞って解説した．理論上重要であっても，実際には利用しないことが多い内容については他書にゆずった．また，工業高校などからの入学者を想定し，数学 B，数学 C を履修していなくても無理なく学習が進められるように最大限配慮した．つまり，ベクトル，行列という言葉を初めて聞く学生でも，本書を学習する上で何の問題もない．自分の手を動かして勉強する気があれば，それが何よりの資質である．

本書は,「計算力をつける微分積分」の姉妹編であるが，より計算力の養成に適した構成になっており，問，章末問題，共に計算練習中心になっている．本書は，手を動かさなければ学習できないという意味で体育の教科書に近い．いくら水泳の本を読んでも泳げるようにならないのと同じく，自分の手を使って計算練習しなければ，永遠に計算ができるようにはならないのである．

本書では，ベクトル空間からスタートする抽象的な理論展開は避け,「連立方程式の解き方」「ベクトル，行列の扱い方」を重点的に説明する．実際のところ，かなり専門的な数学を必要とする一部の学科を除くと，抽象度を上げるご利益は，あまり大きいとはいえないからである．また，算数が分からない段階で二次方程式の解き方を勉強しても得るものがほとんどないのと同じく,「連立方程式の解き方」「行列の扱い方」を知る前に抽象的な概念と格闘するのは，あまり賢い勉強法ではない．

また，数学そのものに強い興味をもたない大部分の学生にとって，必要性がよく分からない状態で勉強するのは苦痛であろうし，そういう状態ではなかなか身につかないだろう．

まずは本書で，連立方程式や行列に関する種々の概念がどのような動機で出てきたのかを理解してほしい．その上で，基礎的な「算術」を掛け算九九のレベルまで消化してほしい．ここがしっかりできていれば，代数的な理論は，必要に迫られてから学んでも遅くはない．

本書では，可能な限り行列の基本変形だけで話の筋が理解できるように書いたため，数学的なエレガントさに欠ける部分があるが，手計算を通して理解するには，この方が好都合な部分も多いと思う．

連立方程式や行列に少しでも親しんでいただければ，本書の目的は達成されたことになる．

最後に，このような本を書く機会を与えてくださった内田老鶴圃社長の内田学氏，お忙しい中，査読を引き受けて下さった大阪府立工業高等専門学校の稗田吉成氏に感謝したい．

2009 年 6 月

神永 正博・石川 賢太

目　　次

第1章　線形代数とは何をするものか？

はじめに，本書で扱う線形代数がどんなものか説明しておこう．

線形代数学という学問分野は幅広い．また，関連する分野も非常にたくさんある．全部理解するのは大変だが，幸い，**数学を使う人たち**にとって特に重要なのは，以下の 3 つだけである．

- 連立方程式を解けるようになること
- ベクトル，行列の意味を理解し，計算ができるようになること
- 行列の性質，特に固有値を理解すること

もちろん，専門的に勉強し始めると，分野ごとにもっと立ち入った知識が必要になるが，これらをよく理解しておけば，もう少し専門的な話を勉強するのはそれほど難しいことではない．まずは，基本をきっちりおさえておくこと，これが肝心である．

そこで，本書では，この 3 つを中心に解説する．

1.1　連立方程式

連立方程式は中学で習っているので，何をいまさら，という人もいると思う．しかし，連立方程式は思っているほど簡単なものではない．例を挙げて説明しよう．

例 1

以下の連立方程式を考えよう．

$$\begin{cases} x + y = 3 & \cdots ① \\ x - y = 1 & \cdots ② \end{cases}$$

もちろん，この連立方程式は解をもち，$x = 2,\, y = 1$ が得られる．グラフで考えてみよう．

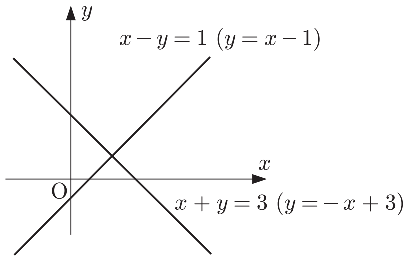


図 1.1　解が一つだけ決まる場合

式①と式②は，直線の式と考えられる．その位置関係は，図 1.1 の通り．連立方程式の解は，2 つの直線の交点になっている．つまりこの場合，**解は 1 つ（1 点）だけ**決まる．めでたしめでたし．

では，次の連立方程式ではどうだろうか．

例 2

$$\begin{cases} x + \ \ y = 3 & \cdots ① \\ 2x + 2y = 6 & \cdots ② \end{cases}$$

この場合，②の両辺を 2 で割れば①になるので，実質的には，方程式は 2 つではなく，"$x + y = 3$"の 1 つだけしかないことになる．このような x, y の組 (x, y) は，$(3, 0)$ でもいいし，$(2, 1)$ でもいいし，$(1, 2)$ でもいい．この直線上の点はすべて解だから，この場合，解は**無数にある**ことになる (図 1.2).

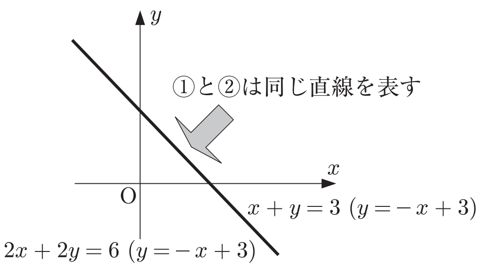


図 1.2　解が無数にある場合

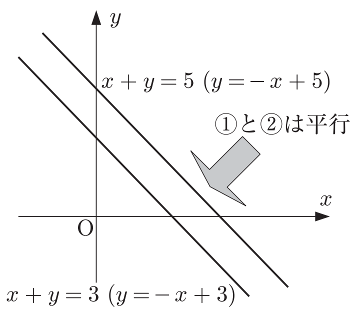


図 1.3　解が存在しない場合

今度は，次の連立方程式を考えてみよう．

例 3

$$\begin{cases} x+y=3 & \cdots ① \\ x+y=5 & \cdots ② \end{cases}$$

①と②が同時にみたされるには，$3=5$ でなければならない．もちろん，そんなことはないので，この場合，**解が存在しない**．グラフを描くと，図 1.3 のようになり，①と②は平行な直線になっていることが分かる．

なるほど．でも，そんなこと，図を見れば分かるのではないか，と思う人がいると思う．

では，次の連立方程式はどうか．

例 4

$$\begin{cases} 3x+4y+7z-4w=3 \\ \ \ x-2y+5z+3w=4 \\ 2x+\ \ y+\ \ z+8w=4 \\ 5x+5y+8z+4w=7 \end{cases}$$

この方程式を見て，解があるかないか，1 つか無数にあるのか，といったことは，見ただけでは分かりにくいだろう（実はこの方程式には無数に解がある）．4 つも未知数があるのでグラフも描けない．

未知数が 4 つくらいなら丁寧に計算すればどうにかなりそうだが，応用上出てくる連立方程式は，もっと多くの未知数をもつ場合がある．未知数が 100 個，1000 個，それどころか 10 万個くらいになることさえある．そうなったら解があるのかないのか，仮にあったとしてそれをどうやって求めればよいのか，きちんと考えておかなければならない．線形代数を学ぶと，このような連立方程式をどのように扱えばよいのかが分かる．

1.2　行列，ベクトル，一次変換

連立方程式をまとめて表現するには，行列とベクトルを使うと便利である．

例えば，先ほどの連立方程式

例 5

$$\begin{cases} 3x+4y+7z-4w=3 \\ \quad x-2y+5z+3w=4 \\ 2x+\ \ y+\ \ z+8w=4 \\ 5x+5y+8z+4w=7 \end{cases} \qquad (*)$$

を行列とベクトルで表すと，次のようにかくことができる．

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & -4 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 5 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

詳しくは，第 4 章「行列と行列の演算」で学ぶので，ここでは大体の意味をつかんでもらいたい．ここで，数字が縦横に全部で $4\times 4=16$ 個並んでいる「表」が**行列**，縦に 4 個の数字（文字）が並んでいるのが（縦）**ベクトル**である．

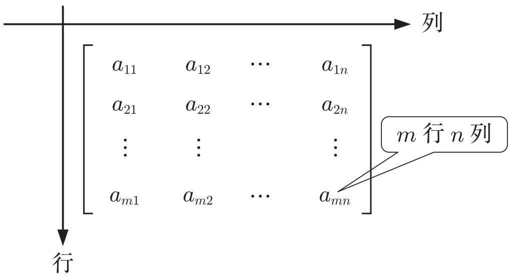
ここで，$4\times 4=16$ 個とか，4 個とかいたが，これは特殊な場合で，一般には，$m\times n$ 個，n 個とすることができる．つまり，数字や文字を縦横に長方形（または正方形）に並べた表を括弧 [　] でくくったものを**行列**という．

一般に，

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

のように長方形に配列したものを，**m 行 n 列の行列**，**$m\times n$ 行列**，**$m\times n$ 型の行列**などという．本書では，**これ以降，行列を表すときは [　] を用いる**ものとする．行列において，その成分の横の並びを**行**といい，上から順に第 1 行，第 2 行，$\cdots$ という．また，成分の縦の並びを**列**といい，左から順に第 1 列，第 2 列，$\cdots$ という．a_{ij} は第 i 行と第 j 列の交わったところにある数字や文字で，この行列の (i,j) **成分**という．

具体的な行列に対して，上の語句を確認してみよう．



例 6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \\ -4 & -1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

を見ると，行の数が 3，列の数が 4 であるから，この行列は 3×4 型である．また第 2 行は $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$，第 3 列は $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ だから，第 2 行と第 3 列の交わったところにある 4 が $(2, 3)$ 成分となる．

一般に，行列は $A, B, \cdots$ などの大文字を用いて表し，単に (i, j) 成分だけで代表させて $A = [a_{ij}]$ のように略記することがある．

ベクトルは，太文字の小文字 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \cdots$ のように表すことが多い．これらの記号を使うと，連立方程式 $(*)$ は，一般に，

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & -4 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 5 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

として，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$$

のように簡単に表すことができる．数字や文字をいちいち並べてかくよりも，このように一括して表現した方が便利なことが多い．

このようにして定義した行列やベクトルについて，どんな計算規則が成り立つのかを考えると，自然に行列の演算（足し算 $A+B$，引き算 $A-B$，掛け算 AB）が定義できる．ところが,「割り算」だけは定義できないことがある．このように行列の性質を調べると，普通の数とは違った性質が現れる．例えば，普通の数では $ab=ba$ が成り立つが，行列では，$AB=BA$ が成り立たないことがある．この性質によって，行列の計算は普通の数の計算よりもずっと難しいものになる．

線形代数学を学ぶと，このような行列の演算について理解することができる．

また，行列には，ベクトルを別のベクトルに変換するという意味もある．例えば，

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}$$

という方程式は，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を行列 A で変換した結果 $A\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{u}$ に等しい，という意味に理解できる．このような対応

$$\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$$

を**一次変換**という．例えば，平面上で原点を中心とした回転という操作を考えると，これは一次変換になる（回転の変換）．

第 11 章で説明するが，ロボットを動かす際には，一次変換が大活躍する．

1.3 固　有　値

行列の性質を詳しく調べると「固有値」というものが出現する．

ここでは固有値の定義はしないが，代わりに，何に使われるかを説明する．

面白い例として，建物や橋など構造物の振動現象に現れる固有値について紹介しておこう．

お寺の鐘をたたくと,「ゴーン」と低い音が出る．一方，ハンドベルやトライアングルなどは高い音が出る．これは，その楽器の「固有振動数」がどのようなものであるかによって決まる．固有振動数は，構造物の大きさや形，材質によって決まるので，うまく調整することによってさまざまな音色の楽器をつくることができる．

理科の実験や音楽の時間に「音叉（おんさ）」（図 1.4）を使ったことがある人は多いだろう．音叉をたたくと音叉ごとに特有の音を聴くことができる．音叉には，さまざまな大きさのものがあるので音叉の音もいろいろである．

図 1.4 音叉 (from wikicommons)

同じ大きさの音叉を 2 つ並べて 1 つだけたたくと面白いことが起きる．1 つをたたいているだけなのに，もう 1 つの音叉も振動して鳴るのだ．これは，両者の固有振動数が同じため「**共振**」が起きた証拠である．

建物や橋，航空機などさまざまな構造物も，地震や風などで振動していることが知られているが，地震の振動の振動数や周期的な風の振動数と構造物の固有振動数が一致したら同じように共振が起きるのだろうか？

1940 年 7 月 1 日，アメリカはワシントン州のピュージェット湾にある海峡に幅 11.9 m，全長 1600 m のつり橋が開通した．当時最新の建築理論をもとにつくられたこの橋は，「タコマ橋」(Tacoma Narrows Bridge) と呼ばれた．この橋は，建築中から揺れがあったが，開通して間もない 1940 年 11 月 7 日，風速 19 m の風が吹いたとき，大きくねじれて揺れ始め，ついに落ちてしまったのだ[*1]．なぜこんなことが起きたのだろうか？原因は，横風によって橋桁の上下に発生した空気の渦が周期的に橋を振動させ，この振動数が橋の固有振動数に近いものだったため共振が生じ，振動をどんどん増幅させたからであった．固有振動数で物体をゆするとだんだん揺れが大きくなるのである．

これと似た現象は他にも起きている．1850 年，フランスのアンジェにあるバス・シェーヌ橋（つり橋）の上で 500 人の歩兵隊が行進していたところ，橋が大きく揺れ始め，ついに陥落し，226 人が亡くなるという大惨事が起きた．これも，歩兵隊の歩調が橋と共振を起こしたことによる．

[*1] タコマ橋の振動については，http://cee.carleton.ca/Exhibits/Tacoma_Narrows/に MPEG 画像（Ed Elliott The Camera Shop 1007 Pacific Ave., Tacoma, Washington, USA 98402）がある．

図 1.5　タコマ橋（再建後のもの）
(from wikicommons)

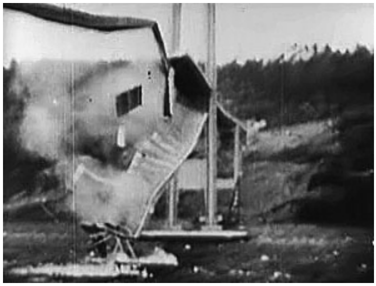


図 1.6　壊れたタコマ橋
(from wikicommons)

このようなことを避けるには，単に橋の材料を強くするだけでは十分ではなく，設計段階で，橋がどのような固有振動数をもっているかを調べておく必要がある．この際に構造物の振動を記述する巨大な行列の固有値を求めることによって，構造物の固有振動数を計算することができる．構造物の振動を調べるのに，固有値は重要な役割を果たしているのだ．

第 1 章　章末問題

[**1**]　次の連立方程式に対し，解が 1 つか，解が無数にあるか，解が存在しないかを，グラフを描いて判定せよ．

(1) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = 3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x + \ \ y = -3 \\ -4x - 2y = \ \ 6 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x - \ \ y = 3 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$

[**2**]　次の行列の型をいえ．

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$　(6) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

[**3**]　行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 0 & 8 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1)　行列 A の型をいえ．

(2)　行列 A の $(3, 2)$ 成分をいえ．

(3)　行列 A の第 4 行をいえ．

(4)　行列 A の第 2 列をいえ．

(5)　行列 A の成分で値が 0 であるものをすべていえ．

第2章 行列の基本変形と連立方程式(1)

中学・高校で連立方程式について学んだ．ここで，もう一度見直してみることにしよう．

2.1 未知数が2つの連立方程式

次のような連立方程式を考える．

例7

$$\begin{cases} x+3y= 6 & \cdots① \\ -4x+2y=-10 & \cdots② \end{cases}$$

まず，② の両辺に 1/2 を掛けて（2 で割って），

$$-2x+y=-5$$

が得られる．これをあらためて ② とすると，この連立方程式は，

$$\begin{cases} x+3y= 6 & \cdots① \\ -2x+y=-5 & \cdots② \end{cases}$$

となる．この変形は，未知数 x, y の値にはもちろん何の影響も与えない．以下同様に，① を 2 倍して ② に加えてみると，② から x が消えて，

$$\begin{cases} x+3y=6 & \cdots① \\ 0x+7y=7 & \cdots② \end{cases}$$

が得られる．② を 7 で割って，

$$\begin{cases} x + 3y = 6 & \cdots ① \\ 0x + y = 1 & \cdots ② \end{cases}$$

最後に，② を 3 倍して ① から引くと，

$$\begin{cases} x + 0y = 3 & \cdots ① \\ 0x + y = 1 & \cdots ② \end{cases}$$

これで連立方程式の解 $x = 3,\ y = 1$ が得られた．

重要なことの 1 つは，変数 x, y は，変形上本質的ではなく，係数だけ見ればよいということだ．そこで，行列に翻訳して変形の過程を見てみると，以下のようになる．このような行列を**係数行列**[*2] という．ここで，行列に縦棒が入っているのは，元の連立方程式の左辺と右辺を区別するためである．また，①，② は，その 1 つ前の行列の第 1 行，第 2 行を意味する．

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & -10 \end{array}\right] &\to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -5 \end{array}\right] & \left(\frac{1}{2} \times ②\right) \\
&\to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right] & (② + 2 \times ①) \\
&\to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] & \left(\frac{1}{7} \times ②\right) \\
&\to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] & (① + (-3) \times ②)
\end{aligned}$$

となる．よって解は，係数行列を連立方程式に戻すことで $x = 3,\ y = 1$ となる．

ここで行った変形は，以下の 2 種類だけであることに注意しよう．

- [操作 **1**]　**ある行を何倍（0 倍以外）かする**
- [操作 **2**]　**ある行の何倍かを他の行に加える**

[*2] 縦棒の左側を係数行列と呼び，これを拡大係数行列ということもある．本書では，特に断らない限り，まとめて係数行列と呼ぶ．

問 1

連立方程式

$$\begin{cases} 2x+3y = 1 \\ -x+y = -3 \end{cases}$$

の係数行列をかけ.

2.2　未知数が 3 つの連立方程式

次に，未知数が 3 つの場合を見てみよう.

例 8

$$\begin{cases} x+2y+3z = 1 & \cdots ① \\ -2x+3y+z = -2 & \cdots ② \\ 3x+y+2z = 5 & \cdots ③ \end{cases}$$

連立方程式を見たら，まず，係数行列に直す.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

これに対して [操作 1]，[操作 2] を繰り返して

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

という形にすれば，解が得られることになる．早速やってみよう.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & 7 & 7 & 0 \\ \mathbf{0} & -5 & -7 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (② + 2 \times ①, \\ \ ③ + (-3) \times ①) \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & -5 & -7 & 2 \end{array}\right] \qquad \left(\frac{1}{7} \times ②\right)$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2 & 2 \end{array}\right] \qquad (③ + 5 \times ②)$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \times ③\right)$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & \mathbf{0} & 4 \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} (① + (-3) \times ③, \\ \ ② + (-1) \times ③) \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad (① + (-2) \times ②)$$

となるので，これを元の連立方程式に戻すと，

$$\begin{cases} 1x + \mathbf{0}y + \mathbf{0}z = 2 \\ \mathbf{0}x + 1y + \mathbf{0}z = 1 \\ \mathbf{0}x + \mathbf{0}y + 1z = -1 \end{cases}$$

なので，$x = 2$, $y = 1$, $z = -1$ が解となる．ここで，消したいと思って消した係数 0 を太文字で示した．ここでも，[操作 1]，[操作 2] しか用いなかったことに注意しよう．

2.3　行列の基本変形

ならば，連立方程式を解くには，[**操作 1**]，[**操作 2**] **で万事 OK かというと，そうではない．**

例を見よう．

例 9

$$\begin{cases} x+2y+3z = 1 & \cdots ① \\ -2x-4y+z = -9 & \cdots ② \\ 3x+y+2z = 5 & \cdots ③ \end{cases}$$

係数行列をかいて，[操作 1]，[操作 2] で変形してみると，

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & -9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 7 & -7 \\ \mathbf{0} & -5 & -7 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l}(② + 2 \times ①, \\ ③ + (-3) \times ①)\end{array}$$

のように，めがけて 0 にしたところ以外にも 0 が出てきてしまう．

だが，ちょっと考えてみれば，これは特に困った話ではない．連立方程式の式の順序はどうでもいいのだから，ここで，② と ③ を入れ替えて，

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & -5 & -7 & 2 \\ \mathbf{0} & 0 & 7 & -7 \end{array}\right] \quad (② \text{ と } ③ \text{ を交換})$$

として計算を続ければよい．

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & -5 & -7 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 7 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & -5 & -7 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \left(\frac{1}{7} \times ③\right)$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & \mathbf{0} & 4 \\ \mathbf{0} & -5 & \mathbf{0} & -5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l}(① + (-3) \times ③, \\ ② + 7 \times ③)\end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & \mathbf{0} & 4 \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \left(\left(-\frac{1}{5}\right) \times ②\right)$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & -1 \end{array}\right] \quad (① + (-2) \times ②)$$

となり，解 $x = 2, y = 1, z = -1$ が得られた．

つまり，連立方程式を解くのに必要な操作は，

- [操作 1]　**ある行を何倍（0 倍以外）かする**
- [操作 2]　**ある行の何倍かを他の行に加える**
- [操作 3]　**ある行と別の行とを交換する**

の 3 つだということが分かる．この 3 つの操作は，いずれも，**連立方程式の解を変化させない変形**で，**行列の（行の）基本変形**と呼ばれている．行列の基本変形は，未知数の個数が増えても通用することは想像がつくだろう．基本変形は，非常に簡単なことに見えるが，今後出てくる「ランク」,「逆行列」,「行列式」などはすべて行列の基本変形によって計算することができる．行列の基本変形は，単純だが，非常に重要な操作なのである．

問 2

連立方程式

$$\begin{cases} -x \phantom{{}+y} + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

を係数行列の基本変形を利用して解け．

第 2 章　章末問題

［**1**］　次の連立方程式について，係数行列をかけ.

(1) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -3x + y = 3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ -x \quad\ \ + 4z = 3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5x - 6y + 3z = 4 \\ -4x + y - 2z = -6 \\ y - 4z = -2 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x \quad\quad - z + w = -1 \\ 2x + y - 3z - w = 3 \\ y \quad\quad - w = 7 \end{cases}$

［**2**］　次の連立方程式を係数行列の基本変形を利用して解け.

(1) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -y = -1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x \quad\quad = -4 \\ -3x + y = 7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -4x + 2y = -3 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} -x + y = -7 \\ 2x + y = 2 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 7 \\ -x - y + 3z = -5 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x + 6y + 6z = -3 \\ -2x + y - z = 2 \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 4 \\ -3x + y + z = 2 \\ 5x + y - z = 8 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} -x + y \quad\quad = 3 \\ 2x - 5y - 4z = -4 \\ -2x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$　　(10) $\begin{cases} x + y - z - w = 2 \\ -3x - y + 5z + 3w = -2 \\ 2x + 4y + z - w = 7 \\ -2x - y \quad\quad\quad\quad = -3 \end{cases}$

11

第 11 章　行列と一次変換

これまで，連立方程式を解く，ということを行列を通して考えてきたが，行列にはもう 1 つの顔がある．それは，ベクトルをベクトルに写す「変換」になっているということである．これを一次変換と呼ぶ．

11.1　ベクトルの一次変換

平面上の点 (x, y) は，1 つの縦ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ であると考えることができる．

ベクトルと行列の積は，点 $\mathrm{P}(x, y)$ を，点 $\mathrm{P}'(x', y')$ に写す変換だと考えられる．例えば，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

は，その例である．この変換で，点 $\mathrm{S}(1, 0)$, 点 $\mathrm{T}(0, 1)$ は，それぞれ，$\mathrm{S}'(4, 2)$, $\mathrm{T}'(3, -1)$ に写る（図 11.1）．

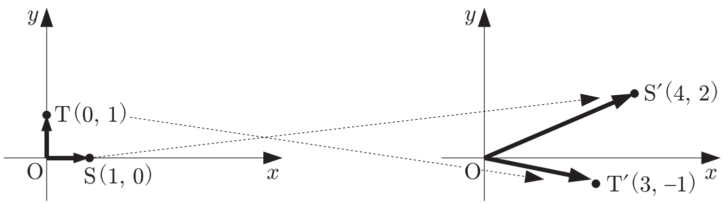


図 11.1　行列による変換

このように，ベクトル $\boldsymbol{u}$ に，$A\boldsymbol{u}$ を対応させる**写像**

$$\boldsymbol{u} \mapsto A\boldsymbol{u}$$

を，**一次変換**または**線形変換**と呼ぶ．

11.2　ロボットアームと回転行列

一次変換はさまざまな用途に利用される．例えば，ロボットアーム（マニピュレータ）を正確に動かすには，所定の軸に対する回転を表現する変換が必要になる．回転を表現する変換は一次変換である．図 11.2 のように座標系を取ると，アーム先端部が $\mathrm{P}(x, y, z)$ にある場合，これを角 θ だけ回転させたときのアーム先端部の座標 $\mathrm{P}'(x', y', z')$ は，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

という一次変換で表現することができる．回転は基本的には平面上の一次変換なので，

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

が重要である．これを**回転行列**という．回転行列を導いておこう．

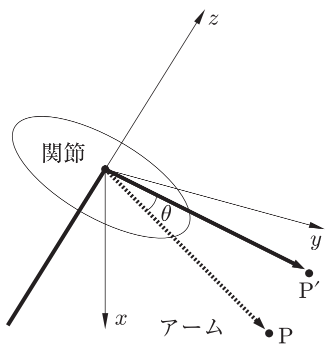


図 11.2　ロボットアームの関節部回転

座標平面上で，原点 O を中心として点 $\mathrm{P}(x, y)$ を角 θ だけ回転した点 $\mathrm{P}'(x', y')$ に写す回転行列は，以下のようにして導くことができる．図 11.3 のように，$\mathrm{OP} = r$ とし，線分 OP と x 軸のなす角を ω とすると

$$x = r\cos\omega,\ \ y = r\sin\omega \tag{11.1}$$

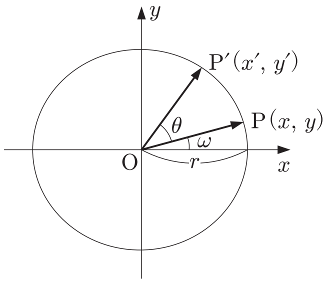


図 11.3　行列による変換

と表せる．回転で長さは変わらない．また $\mathrm{OP}' = r$．線分 OP' と x 軸のなす角は $\omega+\theta$ であるから

$$x' = r\cos(\omega+\theta), \quad y' = r\sin(\omega+\theta)$$

と表せる．三角関数の加法定理[*4] と，式 (11.1) より

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\omega\cos\theta - r\sin\omega\sin\theta \\ &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= r\sin\omega\cos\theta + r\cos\omega\sin\theta \\ &= y\cos\theta + x\sin\theta \\ &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

となる．したがって，原点 O を中心とし，角 θ の回転移動は，次の式で表される一次変換であることが分かる．

角 θ の回転移動

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

[*4] 一般に，角 α, β に対して，$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ が成り立つ．

問 34

$\dfrac{\pi}{6}$ の回転移動の一次変換をかけ.

11.3　直線に対する折り返しの変換

回転と並んで重要な変換に，直線に対する折り返しがある.

原点を通り，x 軸とのなす角が θ であるような直線 ℓ に対する折り返しを表現する行列を求めよう.

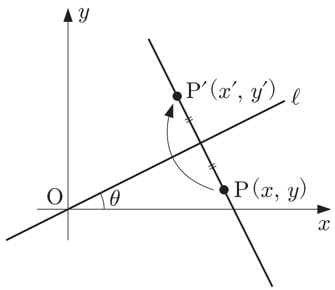


図 11.4　直線に対する折り返し

x 軸とのなす角が θ であるような直線 ℓ の式は,

$$\ell : y\cos\theta = x\sin\theta \tag{11.2}$$

とかくことができる．傾きを用いなかったのは，y 軸に平行になる場合も含めるためである．P と P$'$ の中点が ℓ 上にあるので，式 (11.2) から,

$$\frac{y+y'}{2}\cos\theta = \frac{x+x'}{2}\sin\theta \tag{11.3}$$

が成り立つ．また，PP$'$ は，ℓ に垂直であるから,

$$(y'-y)\sin\theta = -(x'-x)\cos\theta \tag{11.4}$$

式 (11.3) と式 (11.4) を整理すると,

$$
\begin{aligned}
x' \sin\theta - y' \cos\theta &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\
x' \cos\theta + y' \sin\theta &= x\cos\theta + y\sin\theta
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{11.5}
$$

となる．よって，

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\sin^2\theta + \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & -\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．

x 軸とのなす角が θ の直線に対する折り返し

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
$$

問 35

x 軸とのなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ の直線に対する折り返しの一次変換をかけ．

11.4　一次変換と行列式

三角形や四角形などを回転や折り返しで変換しても，元の図形と合同になる．これらは**合同変換**と呼ばれる一次変換である．

一般には，一次変換によって図形は形を変える．先に挙げた一次変換

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

では，原点 O, S$(1,0)$, T$(0,1)$, U$(1,1)$ で囲まれる正方形は，O, S$'(4,2)$, T$'(3,-1)$, U$'(7,1)$ で囲まれる平行四辺形に写る．平行四辺形 OS$'$U$'$T$'$ の面積は，T$'$, S$'$ を通る直線と x 軸の交点が，$\left(\dfrac{10}{3}, 0\right)$ であることから，$1 \times \dfrac{10}{3} + 2 \times \dfrac{10}{3} = 10$ となる．つまり，面積は，この一次変換によって 10 倍になっている．実は，これは，この一次変換を表す行列の行列式の値

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

の絶対値と一致している．これは一般に成り立つ．

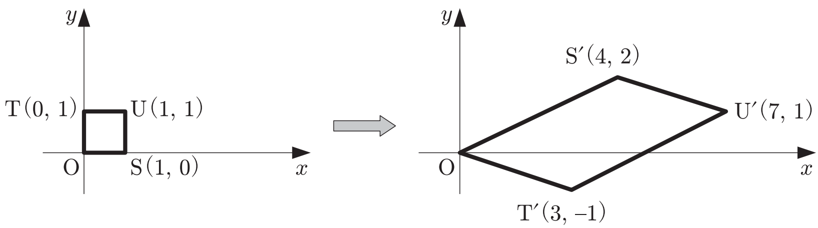


図 11.5　平行四辺形の一次変換

定理 11.1

平面において，ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ のつくる平行四辺形（正方形や長方形も含む）の面積は，2×2 行列 A による一次変換 $\boldsymbol{u} \mapsto A\boldsymbol{u}$ によって，$|\mathrm{det}A|$ 倍される．

[**解説**]　$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を成分表示して，

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

とする．このとき，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ のつくる平行四辺形の面積 S は，2 つのベクトルのなす角を $\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$ として $S = \|\boldsymbol{u}_1\|\|\boldsymbol{u}_2\| \sin\theta$ であるから，

$$
\begin{aligned}
S &= \|\boldsymbol{u}_1\|\|\boldsymbol{u}_2\|\sin\theta \\
&= \|\boldsymbol{u}_1\|\|\boldsymbol{u}_2\|\sqrt{1-\frac{(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)^2}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2\|\boldsymbol{u}_2\|^2}} \\
&= \sqrt{\|\boldsymbol{u}_1\|^2\|\boldsymbol{u}_2\|^2-(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)^2} \\
&= \sqrt{(p^2+q^2)(r^2+s^2)-(pr+qs)^2} \\
&= \sqrt{p^2s^2-2prqs+r^2q^2} = \sqrt{(ps-rq)^2} = |ps-rq|
\end{aligned}
$$

これがちょうど，$|\det[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2]|$ になっていることに注目しよう．この性質を利用すると，$A\boldsymbol{u}_1$, $A\boldsymbol{u}_2$ のつくる平行四辺形の面積 S' は，

$$
\begin{aligned}
S' &= |\det[A\boldsymbol{u}_1\ A\boldsymbol{u}_2]| \\
&= |\det(A[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2])| \\
&= |\det A|\cdot|\det[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2]| = |\det A|\cdot S
\end{aligned}
$$

となる．$\square$

この性質は，空間ベクトルに対する一次変換に対しても一般化できる．

定理 11.2

空間において，ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ のつくる平行六面体の体積は，3×3 行列 A による一次変換 $\boldsymbol{u}\mapsto A\boldsymbol{u}$ によって，$|\det A|$ 倍される．

[**解説**]

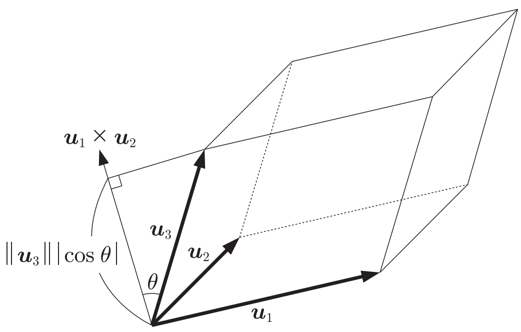


図 11.6　平行六面体

図 11.6 より，ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ のつくる平行六面体の体積 V は，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ のつくる平行四辺形の面積と，この平行六面体の高さ $\|\boldsymbol{u}_3\||\cos\theta|$($\boldsymbol{u}_3$ と $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$ のなす角を θ とした) の積である．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ のつくる平行四辺形の面積は，$\|\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\|$ に等しいことに注意すれば，V は，

$$V = \|\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\|\|\boldsymbol{u}_3\||\cos\theta| = |(\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)| \tag{11.6}$$

とかくことができる．式 (11.6) の右辺の絶対値の中は，ちょうど，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ をそれぞれ，1，2，3 列とした行列の行列式になっていることから，$V = |\det[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3]|$ となる（第 9 章 章末問題［**7**］参照）．

したがって，$A\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_2, A\boldsymbol{u}_3$ というベクトルのつくる平行六面体の体積 V' は，

$$\begin{aligned} V' &= |\det[A\boldsymbol{u}_1\ A\boldsymbol{u}_2\ A\boldsymbol{u}_3]| \\ &= |\det(A[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3])| \\ &= |\det A| \cdot |\det[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3]| \\ &= |\det A| \cdot V \end{aligned}$$

となる．$\square$

（**参考**）　一般の平面図形の面積も行列 A による一次変換で $|\det A|$ 倍される．同様に立体の場合，体積が $|\det A|$ 倍される．一般に平面図形は，微小な長方形が集まったものと見なせ（厳密にはそうとは限らないが，通常想像するような図形はそうである），立体は微小な直方体の集まりと見なせるからである．

第 11 章 章末問題

［**1**］ 本文の図 11.1 のように，次の一次変換について，点 $(1,0)$，点 $(0,1)$ がどの点に写るか座標平面に描け．

(1) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

（(1) の一次変換を**恒等変換**という）

［**2**］ 次の回転移動，折り返しを表す一次変換について，［**1**］と同様に座標平面に点を描け．

(1) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\left(\dfrac{\pi}{4}\text{の回転移動}\right)$

(2) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\left(\dfrac{\pi}{2}\text{の回転移動}\right)$

(3) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\left(x\text{ 軸とのなす角が}\dfrac{\pi}{6}\text{の直線に対する折り返し}\right)$

(4) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\left(x\text{ 軸とのなす角が}\dfrac{\pi}{2}\text{の直線に対する折り返し}\right)$

［**3**］ 2 つの一次変換，(i) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，(ii) $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$（$A, B$ は 2 次の正方行列），に対して，行列 A, B の積 BA をつくり，$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = BA \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ として新しい一次変換をつくることができる．この一次変換によって点 (x, y) は，$(x, y) \xrightarrow{A} (x', y') \xrightarrow{B} (x'', y'')$ と写ることになる．これを一次変換 (i)，(ii) の**合成変換**という．次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\pi}{3}$ の回転移動と $\dfrac{\pi}{6}$ の回転移動の合成変換は，どのような一次変換になるか．

(2) x 軸とのなす角が θ の直線に対する折り返しの一次変換を 2 回行う合成変換

は，どのような一次変換になるか.

［**4**］ 一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ について次の問に答えよ.

(1)　点 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(1,1)$, $\mathrm{C}(1,0)$ をこの変換で写した先の点をそれぞれ A', B', C' とする．このとき四角形 $\mathrm{OA'B'C'}$ が平行四辺形となることを示せ.

(2)　この四角形 $\mathrm{OA'B'C'}$ の面積を求めよ.

［**5**］ 次の問に答えよ.

(1)　直線 $y = mx$ と x 軸のなす角を θ とするとき

$\sin\theta = \dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ であることを示せ.

(2)　直線 $y = mx$ に対する折り返しの一次変換を m を用いて表せ.

［**6**］ 次の問に答えよ.

(1)　一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ により，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ のつくる正方形の面積は何倍になるか.

(2)　一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ により，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ のつくる立方体の体積は何倍になるか.

［**7**］ 次の問に答えよ.

(1)　点 $\mathrm{P}(2,-1)$ を原点 O を中心に $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転すると，どのような点に写るか.

(2)　直線 $y = 2x$ に対し，点 $\mathrm{P}(-1,3)$ と線対称な点を求めよ.

(3)　点 $\mathrm{P}(a,2)$ は $\dfrac{\pi}{6}$ の回転移動と $y = x$ に対する折り返しで同じ点へ写るという. a の値を求めよ.