

まえがき

この本は、線形代数の手法を学習するためのテキストである。また、ひととおりベクトル空間を学習し終えているのに、線形代数のいろいろな概念がどのような関係にあるかがわかりにくいと思っている人たちのための線形代数の構図の案内書でもある。幾何学、トポロジーや代数学においていくつもの現代数学的方法を導入し発展させた Raoul Bott が「数学の 80% は線形代数である」と言っている。このことから推測されるように、数学の多くの定理の証明、さらに理論の展開において、線形代数の知識や推論形式がいたるところで（多くの場合とくに明示されないまま）使われており、線形代数の構造は現代数学の基礎の広範囲にわたって横たわっている。大学初年度の線形代数の学習には、連立 1 次方程式の解法や固有値・固有ベクトルの求め方、対称行列の対角化くらいまでは入っているが、その骨格となる線形空間や線形写像の構造についてはそれほど意識されてないと思う。交代行列の対角化や、さらには行列のジョルダン標準形になると、教わらないまま終えてしまうのではないだろうか。また、線形空間の双対空間 (dual space) は数学の広い分野にわたり登場する重要な概念だが、その重要性にもかかわらず線形代数としてでなく関数解析の教程で教えられることが多い。このテキストで、このような線形代数の構造とその運用・取り扱いを系統的に解説する。

一般に数学では、「(考える) 対象の全体」と「ひとつの対象から別の対象への対応」が与えられるとき、それにともなうすべての仕事をしなければならない。すべての仕事とは、(i) 二つの対象が同じことの定義、(ii) 対象の部分対象、(iii) 写像の像となる対象、核となる対象、(iv) いくつかの対象の直積、直和、(v) 対象の同値関係による商、… (vi) 対象を定める基本的な量の発見、… (vii) これら対象の分類…。「対象」と「対象の間の写像」が定めるひとつの構造において、これらの仕事がおおまかに仕上がると、そのつぎにこの構造と別の構造との間にどんな関係があるかを述べる仕事が仕事になる。“ベクトル空間という対象”と“線形写像という対象間の写像”が与えられたとき、この仕事を

ii まえがき

するのが線形代数である。ベクトル空間は、その次元という基本的な量により決定される。すなわち、次元が等しい二つのベクトル空間は“同じ”ベクトル空間である。次元を定めている限り一つのベクトル空間しかないので、研究の対象となる性質はそれほど多くないと思うかもしれないが、歴史的、論理的ともに、たいへん豊富な内容がそこにはある。たとえば、〈行列の標準形を求めること〉は最初の仕事表で言えば、(v) 対象の同値関係による商、(vi) 対象を定める基本的な量の発見、(vii) これら対象の分類、に相当する。このテキストでは、行列の標準形を求め、その意味を考えることや、各行列に固有の性質を表現している固有値、固有ベクトルについてかなり詳しく学習する。線形代数の構造を「内積空間と 内積を変えない写像」に制限して述べると「内積を持ったベクトル空間」の構造が登場する。また、線形代数の構造と「位相空間と連続写像」の構造とを合成すれば、線形位相空間が対象となる。

I 章では、「(実) 線形空間と線形写像の構造」で成り立つ諸命題を学習する。ベクトル空間の基底、ベクトルの座標表示、座標変換とそれを表す行列、などを解説する。

II 章では、「線形空間と線形写像の構造」に「(実) 内積空間の構造」を加えて成り立つ諸命題を解説する。内積を変えない座標変換（直行変換）や内積に関して対称な写像が大切なことを学ぶ。

II 章の後半から III 章、IV 章とにかけて、行列の標準形について解説する。与えられた行列を座標変換によりなるべくわかりやすい行列、例えば対角行列に変形すること、それほど簡単な形にならないときはどの程度までを標準形と見るか、を考える。この過程で線形代数の核心となるいくつかの概念を学ぶことになる。

IV 章では、〈(複素) 線形空間と線形写像〉の構造で成り立つ諸命題を、

V 章では、〈(複素) 線形空間と線形写像〉の構造 + 〈エルミート内積空間〉の構造で成り立つ諸命題を、それぞれ述べる。

テキストを読むときいろいろと数学の概念が出てくるが、その意味をわかるのは大変むづかしい。それらが単に思いつきで登場するのではなく、理論を展開する上で大切な道具になると納得できるように解説を試みた。この講義の流れ

に沿って問（やさしいものしかない）を全部解いていけば線形代数がよく理解できる。各節の主張が何かを意識すること（各節の表題となる熟語をきちんと読むこと）が大切である。

このテキストを読む読者は、集合と写像についての基礎的な知識をすでに持っているものとした。日常用語としてでなく数学の基礎としての集合と写像の理論は数学を論理的に学び理解するためには欠かせない。例えば、

森田茂之：集合と位相空間，講座 数学の考え方 8，朝倉書店 (2002)
等で学習していただきたい。

また，このテキストで述べられている命題で証明を省略したものがある。それらについては、

佐武一郎：線型代数学，数学選書 1，裳華房 (1973)
の対応した箇所を記しておいた。

2016 年 5 月

郡 敏昭