編 者 緒 言

本書は，藤原松三郎著数学解析第一編「微分積分学」第一巻および第二巻を現代仮名遣いに改め，用語の一部を現在ひろく用いられているものに置き換えたものである．

微分積分学の分野では，周知のように我が国には高木貞治による「解析概論」という名著があり，ほぼ 80 年にわたり読み継がれてきている．本書第一巻が世に出たのは 1934 年で，ちょうど「解析概論」の原型である岩波講座「数学」版が執筆されていた頃である．「解析概論」は万人向きの解析学予修書を目指したもの（講座版結語より）であり，一方,「微分積分学」は日本語で書かれた解析教程（Cours d'Analyse）として，古典解析学の広範な成果の集成を目指している．両書は，互いに相補う役割を担う好対として戦前戦後を通じて版を重ねてきた古典である．少なからぬ理系研究者が本書を携えて欧米に留学したと聞く．

今般，書肆より，新しい読者のために表記を現代仮名遣いに改めた新編を出版したいとの提案があった．編者はこれを若い世代に本書を伝えていくための好機ととらえて作業に着手した次第である．新編では，仮名遣いを現代表記に改めたほかに，原著の香りを損なわない範囲で表現を口語に近づけた箇所もある．また，本文中の論証についても分かりやすくするため手を加えた箇所が若干ある．さらに，今日では使われることがなくなった術語を現在定着しているものに置き換えた．術語の選定にあたっては,「数学辞典」第 4 版（岩波書店）を基準とした．たとえば,「分離積分法」,（積分の）「代入法」をそれぞれ「部分積分法」,「置換積分法」とした．原著では「整函数」を整式で定義された関数という意味で用いているが，複素変数関数論における整関数 (integral function, entire function) との混同を恐れ，すべて「整式」または「多項式」に置き換えた．人名の表記も「数学辞典」に準拠して改めた．

編者の浅学非才のため，思わぬ誤解から却って原著の明晰性を損ねてはいないかと恐れる．読者の叱正を俟って改訂をしていく所存である．

なお，数学解析は第一編「微分積分学」第一，二巻に続き，第二編が計画されていた．第二編（もしくは第三巻）では，複素変数関数論，微分方程式に対する境界値問題，直交関数論，積分方程式論，変分法などを論ずる予定であった．残念なことに，これは実現しなかった．本文中では，所々「第二編で論ずる」旨の説明があるが，そのような事情であることを理解されたい．

2016 年 8 月

編著者

目　　次

編者緒言 ………………………………………… iii

原著者紹介 ………………………………………… v

原著，新編用語対照表 ………………………………… vii

記号表 ………………………………………… viii

序　　言 ………………………………………… xi

凡　例 ………………………………………… xiii

第 1 章　基本概念

第 1 節　無理数 ………………………… §1.1〜§1.5　1〜8

極限／切断／無理数／集合の上限，下限／実数の四則

第 2 節　数列の極限 ………………………… §1.6〜§1.13　9〜32

数列の極限／数列の収束，発散，振動／上極限，下極限／極限の存在条件／コーシーの収束条件／カントルの無理数論／極限に関する定理／上極限，下極限に関する定理

第 3 節　点集合 ………………………… §1.14〜§1.18　32〜38

点集合／集積点／ワイエルシュトラス–ボルツァーノの定理／導集合／区間

第 4 節　無限級数 ………………………… §1.19〜§1.23　38〜66

無限級数の収束発散振動／正項級数の収束条件／一般級数の収束条件／絶対収束と条件収束／級数の積

第 5 節　無限乗積 ………………………… §1.24〜§1.26　66〜72

無限乗積／収束条件／絶対収束

第 6 節　関数の極限 ………………………… §1.27〜§1.32　72〜82

関数の定義／関数の極限／極限の第二定義／極限の存在条件／極限に関する定理／有界関数と単調関数

第 7 節　連続関数 ……………… §1.33〜§1.38　82〜91

連続関数／不連続関数／ワイエルシュトラスの逐次分割論法／連続関数の性質／上限下限と最大最小値／一様連続

第 8 節　初等関数 ……………… §1.39〜§1.46　91〜119

有理関数，代数関数，逆関数／三角関数／逆三角関数／指数関数／対数関数／一般の冪関数 x^a と一般指数関数 a^x ／無限大になる速度／ランダウの記号

第 1 章　練習問題 ……………… 120〜129

第 2 章　微　分

第 1 節　微分法 ……………… §2.1〜§2.7　131〜142

微係数と導関数／二つの関数の和差積商の微係数／合成関数の微係数／逆関数の微係数／初等関数の微係数／対数微分法／高次微係数の計算

第 2 節　導関数 ……………… §2.8〜§2.11　142〜152

左右の微係数／動関数の性質／微係数の幾何学的解釈／到る所微分不可能な連続関数

第 3 節　平均値定理 ……………… §2.12〜§2.14　153〜164

ロルの定理／平均値定理／テイラーの定理

第 4 節　平均値定理の応用 ……………… §2.15〜§2.22　164〜197

平均値定理の別の拡張／拡張された二次微係数／平均値定理の他の拡張／近似計算への応用／根の計算に関するニュートンの方法／不定形／ロピタルの定理の逆／関数の極大極小

第 5 節　テイラー級数 ……………… §2.23〜§2.25　197〜210

テイラー級数／テイラーの定理によらない展開／実解析的関数

第 6 節　関数項の無限級数 ……………… §2.26〜§2.41　211〜257

関数列と関数項の無限級数／一様収束／一様収束級数の性質／一様収束の判定条件／一点における一様収束／級数の項別微分／無限乗積の一様収束／冪級数の収束区間／コーシー–アダマールの定理／冪級数の和，差，積，商／冪級数の表す関数／アーベルの定理／実解析的関数の条件／実解析的関数の性質，準解析関数／特殊な形の級数／微積分学の発達

第 **2** 章　練習問題 …… 258～271

第 3 章　積　　分

第 1 節　不定積分 …… §3.1～§3.7　273～301

不定積分／有理関数の積分／三角関数の積分／二次無理関数の積分／楕円積分／$x^m(ax^n+b)^p$ の積分／超越関数の積分

第 2 節　定積分 …… §3.8～§3.15　301～325

定積分／連続関数の積分／有限個の不連続点をもつ有界関数の積分／積分の性質／定積分と不定積分との関係／部分積分／第一平均値定理／第二平均値定理

第 3 節　有界でない関数の積分 …… §3.16～§3.21　325～343

不連続関数の積分／有界でない関数の積分可能条件／コーシーの主値／積分の性質／級数の項別積分／項別積分に関するアルツェラの定理

第 4 節　無限積分 …… §3.22～§3.28　343～368

無限積分／無限積分と無限級数／無限積分の性質／無限積分の収束条件／項別積分／ベッセル関数／定積分の計算

第 5 節　ガンマ関数 …… §3.29～§3.34　368～382

$\Gamma(x)$ の定義／ $\Gamma(x)$ の性質／ $\Gamma(x)$ の積分表示／ B 関数／ $\Gamma(x)$ とディリクレ級数／スターリングの公式

第 6 節　定積分の近似計算 …… §3.35～§3.36　382～390

定積分の近似計算／ガウスの理論

第 **3** 章　練習問題 …… 391～406

第 4 章　二変数の関数

第 1 節　二重数列と二重級数 …… §4.1～§4.13　407～440

二重数列の極限／累次極限／二重極限の存在条件／単調二重数列と有界数列／二重数列の上極限，下極限／行，列の一様収束／二重級数／累次級数／絶対収束／二重級数の収束，発散の例／ヒルベルトの定理／ヘルダーおよびミンコフスキーの不等式／ハーディ–リトルウッドの定理

第 2 節　関数の極限 ……………………………… §4.14〜§4.20　440〜454

平面上の点集合の極限点と集積点／二変数の関数の極限／単調関数と有界関数／二変数の連続関数／変数の各々について連続な関数／一様収束／二変数の冪級数

第 3 節　二変数の関数の微分 ……………………… §4.21〜§4.26　454〜466

偏微係数／平均値定理／全微分可能な関数／ $f_{xy}=f_{yx}$ の条件／テイラーの定理の拡張／二変数の関数の極大極小

第 4 節　二変数の関数の積分 ……………………… §4.27〜§4.32　466〜492

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$ の連続性／定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\varphi(t)dt$ の微分可能性／テイラーの定理の剰余項／無限積分の一様収束／ $\displaystyle\int_a^\infty f(x,t)dt$ の連続性／ $\displaystyle\int_a^\infty f(x,t)dt$ の微分可能性

第 5 節　二重積分 …………………………………… §4.33〜§4.38　492〜514

二重積分／累次積分／有界でない関数の二重積分／無限二重積分／二重級数と二重積分との関係／累次積分の順序変更

第 6 節　任意次数の微分積分 ……………………… §4.39〜§4.41　514〜531

任意次数の微分積分／ $D^p f$ の性質／諸問題の統一的観点

第 7 節　定積分の近似評価 ………………………… §4.42〜§4.51　531〜584

近似評価問題／無限級数と無限積分との交渉／ラプラスの問題／特異積分／ディリクレ積分／フーリエの二重積分公式／ベルヌーイ関数／オイラー–マクローリンの和の公式／近似級数／チェザロの定理

第 **4** 章　練習問題 ……………………………………………… 585〜592

文献補遺 ………………………………………………………… 593〜604

補　　遺 ………………………………………………………… 605〜608

総 索 引 ………………………………………………………… 609〜619

欧字先頭索引 …………………………………………………… 621〜630

著者索引 ………………………………………………………… 631〜634

微分積分学 第 2 巻 目次 ………………………………………… 635〜636

第1章　基本概念

第1節　無　理　数

1.1.　極限.　ここに水平直線上に一点 O をとり，O から右に順々に $P_1, P_2, P_3, \ldots$ なる点をとってゆくとき，ある一点 M より右へ出てはならないという制限をおけば，$P_1, P_2, P_3, \ldots$ はどこか一定の点に近づかねばならない．

これを幾何学の言葉を離れて言えば：

実数 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ が漸次増加するとき，そのすべてが決して一つの実数 m を超えられないとすれば，$a_1, a_2, \ldots$ はある一定の数に近づかねばならない．

以上のような論法を見て，読者は何等不都合を感ぜられないであろう．これは独り読者のみではない．1858 年にデデキント（Dedekind）がこれに批判的の眼を向けるまでは何人もその証明の必要を認めなかったのである．

然るにデデキントは上述の事実は微積分学の礎石であって，厳密な証明を要すべきものと考えた．彼はこれを証明するためには無理数の概念を再吟味する必要があることを看取し，無理数の概念の確立によって初めて目的の達せられることを明らかにした．彼はこの結果を 1858 年に得たのであるが，これを公にしたのは “連続と無理数”（Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872）という古典的な単行本であった．

よって我々はまずデデキントの無理数論を述べる必要がある．その詳細はすでに代数学，第 1 巻で説いたから，ここではその大要に止める[*1]．

1.2.　切断.　整数，分数をまとめた有理数については，すでに読者の熟知されている所であろう．

有理数に加減乗除の四則を行っても（0 による除法を除いて），やはり有理数が得られるが，$x^2 = 2$ に適合する x は有理数の範囲内では存在しない．然るに量を考察する

§1.1,*1　初学者は第 1 節を省略して，直ちに第 2 節から始められた方がよろしかろう．

場合には，一辺の長さ 1 なる正方形の対角線の長さは $x^2 = 2$ に適合する．よって有理数以外に新しい数を導入すべき必要に迫られる．

無理数の思想はすでに古代ギリシアにもあったが，厳正な理論は漸く 1870 年代において，デデキントおよびカントル（Cantor）が打ち立てたものである．以下デデキントに従ってその理論の大要を述べることにする[*1]．

今あらゆる有理数を次のごとく (A_1), (A_2) なる二組に分割する．一つの有理数 a より小なる有理数は (A_1) に，a より大なる有理数は (A_2) に，a それ自身は (A_2) に入れる．このようにすれば明らかに次の事実が成立する．

(1)　いずれの有理数も (A_1), (A_2) の一方だけに含まれる．
(2)　(A_1), (A_2) は各々少なくとも一つの有理数を含む．
(3)　(A_1) の含む有理数は (A_2) の含む有理数より小さい．
(4)　a は (A_2) 内の最小数であり，(A_1) には最大数がない．

最後の事実は証明を要する．仮に (A_1) に最大数 b があったとすれば，$b < a$ である．a, b 間には少なくとも一つの有理数 r が存在する．$b < r$ であるから，r は (A_1) に含まれない．また $r < a$ であるから r は (A_2) にも含まれない．これは (1) に矛盾する．

a を (A_2) に入れる代わりに，(A_1) に入れると，(1), (2), (3) は成立するが，(4) は次の形をとる．

$(4')$　a は (A_1) 内の最大数であり，(A_2) には最小数がない．

この場合を (II), さきの場合を (I) としよう．

次に第三の場合 (III) として，例えば次のものをとる．

平方が 2 より大なる正の有理数は (A_2) に入れ，平方が 2 より小なる正の有理数と，負の有理数および零を (A_1) に入れる．この場合にも，やはり (1), (2), (3) は成立するが，(4) の代わりに次のことが成立する．

$(4'')$　(A_1) には最大数なく，(A_2) には最小数がない．

§1.2,*1　藤原松三郎，代数学，第 1 巻，§3.17～3.28 および高木博士，数学雑談（続輓近高等数学講座）参照．

何となれば，仮に (A_2) に最小数 b があったとすれば，(A_2) の性質から $b^2 > 2$ である．故に b より少し小さい有理数 $b-\varepsilon$ をとっても，$(b-\varepsilon)^2 > 2$ となるようにできる．このためには $b^2-2 > 2b\varepsilon$ となるように ε をとればよい．従って b より小なる $b-\varepsilon$ がやはり (A_2) に含まれることになり，b は (A_2) の最小数でなくなる．同様に (A_1) に最大数がないことが分かる．

(1), (2), (3) に適合するような二組 (A_1), (A_2) に分けて配列された有理数全体を，デデキントは**切断**と名づけた．我々はこれを記号 $(A_1|A_2)$ で表そう．

一般の切断 $(A_1|A_2)$ に対しても，さきに論じた三つの場合：

(I)　(A_1) に最大数はなく，(A_2) に最小数 a がある．

(II)　(A_1) に最大数 a があり，(A_2) に最小数がない．

(III)　(A_1) に最大数はなく，(A_2) に最小数がない．

が区別される．第四の場合

(IV)　(A_1) に最大数 a があり，(A_2) に最小数 b がある．

が起こり得ないことは，すでに (I) の場合に証明した．

(I), (II) の場合には，有理数 a が，(A_2) の最小数または (A_1) の最大数として，切断 $(A_1|A_2)$ によって一通りに定まる．このように考える代わりに，切断 $(A_1|A_2)$ を以て有理数 a を表すものと見ることができる．もちろんこのように定義された有理数は，すでに定義されている有理数と全く同一の法則で支配されるということを証明した後でなければならないが，それらの証明はここには省く．

1.3.　無理数.　(III) の場合は (I), (II) と事情を異にする．ここでは (A_1) に最大数はなく，(A_2) に最小数がないから，切断 $(A_1|A_2)$ は有理数を表さない．この場合，切断 $(A_1|A_2)$ は一つの新しい数を表すものとし，これを**無理数**と名づけるのがデデキントの思想である．

有理数と無理数とを合わせて**実数**という．

さて無理数を切断で定義した以上，その和差積商および大小の定義を適当に定め，これが有理数と同一の法則によって支配されることを示さねばならない．ここでは代数学，第 1 巻で論じたのとは順序を変更して，まず大小の定義から始める．

第2章　微　　分

第1節　微 分 法

2.1. 微係数と導関数.　$f(x)$ を区間 (a, b) で定義された連続関数とし，x を (a, b) 内の一点とする[*1]．x が $x+h$ に変われば $f(x)$ は $f(x+h)$ に変わる．x の変化 h に対する $f(x)$ の変化 $f(x+h)-f(x)$ と h との比の $h \to 0$ における極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{f(x+h)-f(x)\}$$

が存在して有限なる場合に，これを $f(x)$ の**微係数**（または**微分係数**）と名づけ，記号 $f'(x)$ で表す：

$$f'(x)=\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{f(x+h)-f(x)\}.$$

$f(x)=y$ とすれば，$f'(x)$ を y' または $\dfrac{dy}{dx}$ とも記す．

$f'(x)$ が存在するとき，$f(x)$ は x で**微分可能**であるという．

$f(x)$ が (a, b) のすべての点で微分可能ならば，$f(x)$ は (a, b) で微分可能であるという．この場合に $f'(x)$ を x の関数と考えれば，これを $f(x)$ の**導関数**という．

$f(x)$ の微係数を求めることを**微分する**という．

もし $f'(x)$ がさらに微分可能ならば，その微係数を $f(x)$ の**二次微係数**（または**二階微係数**）といい，これを $f''(x)$, y'' または $\dfrac{d^2y}{dy^2}$ で表す．

同様にして $\boldsymbol{n}$ **次微係数**（または $\boldsymbol{n}$ **階微係数**）が定義される．これを $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$ または $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ で表す．

$f'(x)$ が (a, b) で微分可能ならば，$f''(x)$ を $f(x)$ の**二次導関数**（または**二階導関数**）という．同様にして $\boldsymbol{n}$ **次導関数**（または $\boldsymbol{n}$ **階導関数**）$f^{(n)}(x)$ が定義される．

$f(x)$ が x で n 次微係数をもてば，$f(x)$ は x で n 回微分可能であるという．

---

§2.1,*1　本章でも一価関数のみを取り扱う．従って関数とあればすべて一価関数を意味する．

2.2.　二つの関数の和差積商の微係数.　$f(x)$, $g(x)$ が微分可能ならば，$f \pm g$, fg, $1/f$, g/f もまた微分可能で

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \tag{I}$$

$$(fg)' = f'g + fg', \tag{II}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}, \quad \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{fg' - f'g}{f^2}. \tag{III}$$

ただし (III) では $f(x) \neq 0$ と仮定する．

証明.　極限に関する定理 (§1.12, 定理 2) を

$$\begin{aligned}
(f \pm g)' &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \{f(x+h) \pm g(x+h) - f(x) \mp g(x)\} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \pm \frac{1}{h}(g(x+h) - g(x))\right\}, \\
(fg)' &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{g(x+h) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\}, \\
\left(\frac{1}{f}\right)' &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}\right\} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{f(x)f(x+h)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
\end{aligned}$$

に適用すれば，(I), (II) および (III) の第一が出る．それと (II) との組み合わせによって (III) の第二が出る．

(II) を繰り返して適用すれば

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + \binom{n}{1}f^{(n-1)}g' + \binom{n}{2}f^{(n-2)}g'' + \cdots \\
+ \binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)} + \cdots + fg^{(n)}
\end{aligned} \tag{IV}$$

が得られる．これを**ライプニッツの公式**という．ただし

$$\binom{n}{k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)/k!.$$

これは数学的帰納法で証明される．すなわち (IV) が成立するものと仮定して，これを微分すれば，(II) により

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)} \right) \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right\} f^{(n-k)} g^{(k+1)} + f g^{(n+1)}.
\end{aligned}
$$

然るに
$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k+1)!}(k+1+n-k) \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}
$$

よって (IV) において n を $n+1$ とした公式が得られる．これと (II) とから数学的帰納法は完了する．

2.3. **合成関数の微係数.** $y = f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続で，(a, b) 内の一点 ξ で微分可能とし，$z = \varphi(y)$ は $[\alpha, \beta]$ (ただし $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$) で連続で，$y = \eta$ (ただし $\eta = f(\xi)$) で微分可能ならば，合成関数 $F(x) = \varphi(f(x))$ は $x = \xi$ で微分可能で

$$
F'(\xi) = \varphi'(\eta) f'(\xi). \tag{V}
$$

書き換えれば

$$
\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.
$$

証明. §1.36, 定理 2 によって $F(x) = \varphi(f(x))$ は $[a, b]$ で連続である．今

$$
f(\xi) = \eta,\ f(\xi + h) = \eta + k,\ k = f(\xi + h) - f(\xi)
$$

とおけば

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h} \{ f(\xi + h) - f(\xi) \} \to f'(\xi) \qquad (h \to 0), \\
&\frac{1}{k} \{ \varphi(\eta + k) - \varphi(\eta) \} \to \varphi'(\eta) \qquad (k \to 0).
\end{aligned}
$$

然るに

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h} \{ F(\xi + h) - F(\xi) \} &= \frac{1}{h} \{ \varphi(f(\xi + h)) - \varphi(f(\xi)) \} \\
&= \frac{1}{h} \{ \varphi(\eta + k) - \varphi(\eta) \}
\end{aligned}
$$

第3章　積　　分

第1節　不定積分

3.1.　不定積分．　$f(x)$ が開区間 (a,b) 上で連続かつ微分可能である場合には，$f(x)$ から微分によって導関数 $f'(x)=F(x)$ が求められる．この場合に，$f(x)$ を関数 $F(x)$ の**原始関数**または $F(x)$ の**積分**と名づけ，これを記号 $\int F(x)\,dx$ で表す．$\int$ は 17, 18 世紀の頃に用いられた s の形で，和を意味する summa の頭文字である．ライプニッツが初めて用いたものである．

第 2 節で論ずる定積分と区別するために，**不定積分**ともいう．しかし略して単に積分ということにする．

$F(x)$ を**被積分関数**という．$F(x)$ の積分を求める演算を**積分する**という．

$F(x)$ の積分は一つではない．その一つを $f(x)$ とし，他の任意の積分の一つを $\varphi(x)$ とすれば，定義によって

$$f'(x)=F(x),\qquad \varphi'(x)=F(x)$$

であるから，§2.12 の定理によって，$\varphi(x)$ は $f(x)$ と唯常数だけの違いである:

$$\varphi(x)=f(x)+C.$$

故に $F(x)$ の積分は $\int F(x)\,dx+C$ とすべきである．C を**積分常数**と名づける．ただし普通はこれを略して書かない．

以上の定義および，§2.5 において知られた導関数の知識から，直ちに次の基本的な積分が得られる．

$$\int x^m\,dx=\frac{1}{m+1}\,x^{m+1},\qquad (m \text{ は } \neq -1 \text{ となる任意の実数である}).$$

$$\int \frac{dx}{x}=\log x.\qquad (\text{厳密に書けば } \log|x|\text{．注意 2 参照}).$$

$$\int e^x\,dx=e^x,\qquad \int a^x\,dx=a^x/\log a,\quad (a>0).$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x.$$
$$\int \tan x\,dx = -\log\cos x, \qquad \int \cot x\,dx = \log\sin x.$$
$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x, \qquad \int \mathrm{cosec}^2 x\,dx = -\cot x.$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x.$$

次に §2.2, (I), (II):

$$(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x), \qquad (C\,F(x))' = C\,F'(x),$$
$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

から直ちに

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx, \qquad \int c\,f\,dx = c\int f\,dx \tag{1}$$
$$fg = \int f'\,g\,dx + \int f\,g'\,dx$$

が得られる．最後の式を書き換えて

$$\int f'\,g\,dx = fg - \int fg'dx \tag{2}$$

となる．左辺の積分を求めるのに右辺で置き換える方法を**部分積分法** (**分離積分法**)*1 という．

次に $y = F(x)$ において $x = \varphi(t)$ とおけば，$y = F(\varphi(t))$ となり，§2.3, (V) によって

$$\frac{dy}{dt} = F'(x)\,\varphi'(t)$$

となることから，$F'(x) = f(x)$ とおけば

$$\int f(x)\,dx = F(x) = \int F'(x)\,\varphi'(t)\,dt,$$

すなわち

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{3}$$

左辺の積分を求めるのに右辺をもって行う方法を**置換積分法** (**代入法**)*2 という．

§3.1,*1 〔**編者注**：原著では**分離積分法**と呼んでいるが，広く用いられている**部分積分法**を採用する．〕

*2 〔**編者注**：原著では**代入法**と呼んでいるが，一般的に用いられている**置換積分法**を採用する．〕

注意 1.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0, \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0$$

から $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x$ としても，また $= -\cos^{-1}x$ としてもよろしい．何となれば，これは実は

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + C, \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1}x + C'$$

とすべきところを，積分常数 C, C' を省略したのであるから．

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

であることを見れば，一層明らかになる．

同様に $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x$ としても，$= -\cot^{-1}x$ としてもよろしい．

注意 2. すでに §1.43 で注意した通り，実数の範囲内では，負数の対数は存在しないから

$$\int\frac{dx}{x} = \log x$$

は $x > 0$ の場合のみ成立する．x が負数である場合には，$x = -x'$, $x' > 0$ とすれば

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dx'}{x'} = \log x' = \log|x|.$$

故に厳密にいえば $\displaystyle\int\frac{dx}{x} = \log x$ とする代わりに

$$\int\frac{dx}{x} = \log|x|$$

とすべきである．

しかしもし複素数の範囲まで考えを拡げる場合には，負数の対数も存在し，$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$，$e^{(2n+1)\pi i} = -1$ から

$$\log(-x) = \log x + (2n+1)\pi i.$$

故に $(2n+1)\pi i$ を積分常数 C に含めておけば，x の正負にかかわらず

$$\int\frac{dx}{x} = \log x$$

として差し支えないわけである．以下では，$\displaystyle\int\frac{dx}{x} = \log|x|$ と書かずに，$\displaystyle\int\frac{dx}{x} = \log x$ とおく．

〔**編者注**: 複素数 $z \neq 0$ に対し $z = e^w$ の解は $w = \log z = \log|z| + i\arg z$ と表示され，第 1 項は実数 $|z|$ の対数，第 2 項は z の偏角といい $2n\pi$ (n は整数) の任意性がある．〕

3.2. 有理関数の積分． 有理関数 $R(x)$ の積分を求めるには，まず**部分分数**の概念によって，簡単な関数の積分に分解する．

第4章　二変数の関数

第1節　二重数列と二重級数[*1]

4.1.　二重数列の極限.　今まで論じてきた一変数の関数の理論を二変数の関数に及ぼそうとするのが本章の目的である.

まず数列と級数の理論を二重数列と二重級数に拡張し次に二変数の関数の極限，連続性，微分，積分を論ずることにする．そのある部分は従前と全く平行に進み得るが，また他の部分には特殊の現象が生ずる．前者に対しては証明を簡略にする.

今実数の集合 $u_{m\,n}$ $(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$ を

$$\begin{array}{llll} u_{1\,1}, & u_{1\,2}, & u_{1\,3}, & \ldots \\ u_{2\,1}, & u_{2\,2}, & u_{2\,3}, & \ldots \\ u_{3\,1}, & u_{3\,2}, & u_{3\,3}, & \ldots \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

の形に配列し，これを**二重数列**と名づける．簡単のために，これを $(u_{m\,n})$ で表そう．これと区別するため，従来の数列 (u_n) を**単一数列**と言おう.

単一数列の極限の概念を二重数列の場合に及ぼすにはどうすればよいか．これが第一の問題である.

定義 1.　任意の正数 ε に対して整数 N を適当に定めて

$$|u_{m\,n} - A| < \varepsilon, \qquad m, n > N$$

が常に成立するとき，A を二重数列 $(u_{m\,n})$ の**二重極限**, あるいは単に**極限**といい，これを次のように記す：

[*1]　二重数列，二重級数の研究は Pringsheim, Münchener Ber. 1897, Math. Ann. 53, 1900; London, Math. Ann. 53, 1900; Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- u. Funktionenlehre, I_2, 1916 参照.

$$\lim_{m,n\to\infty} u_{m\,n} = A,$$

または

$$u_{m\,n} \to A \qquad (m, n \to \infty).$$

この場合に $(u_{m\,n})$ は A に**収束**するという．

定義 2.　任意の正数 l に対し，整数 N を適当に定めて

$$u_{m\,n} > l, \qquad m, n > N$$

が常に成立するとき，$(u_{m\,n})$ の極限は $+\infty$ であるという．これを次のように記す：

$$\lim_{m,n\to\infty} u_{m\,n} = +\infty,$$

または

$$u_{m\,n} \to +\infty \qquad (m, n \to \infty).$$

この場合に $(u_{m\,n})$ は $+\infty$ に**発散**するという．

$u_{m\,n} > l$ の代わりに

$$u_{m\,n} < -l \qquad (m, n > N)$$

が成立すれば，$(u_{m\,n})$ の極限は $-\infty$ であるといい，

$$\lim_{m,n\to\infty} u_{m\,n} = -\infty,$$

または

$$u_{m\,n} \to -\infty \qquad (m, n \to \infty)$$

と書く．$(u_{m\,n})$ は $-\infty$ に発散するともいう．

収束もせず，発散もしない場合には，**振動**するという．

$(u_{m\,n})$, $(v_{m\,n})$ がそれぞれ A, B に収束すれば，$(u_{m\,n} + v_{m\,n})$, $(u_{m\,n} - v_{m\,n})$, $(c\,u_{m\,n})$ (c は常数)，$(u_{m\,n}\,v_{m\,n})$，$(u_{m\,n}/v_{m\,n})$ がそれぞれ $A+B$, $A-B$, $c\,A$, $A\,B$, A/B に収束することは，単一数列の場合と同様に証明される．ただし $(u_{m\,n}/v_{m\,n})$ においては $B \neq 0$ と仮定する．

注意.　定義から分かるように，二重数列に対しては有限個の行および列は収束に影響がない．

4.2.　累次極限.　二重数列 $(u_{m\,n})$ が A に収束することは，m, n が同時にかつ各独立に $\to\infty$ となるとき，$u_{m\,n}$ が A に近づくことを意味する．m, n が共に $\to\infty$

となっても，m, n の間にある関係が成立しながら $\to \infty$ となったのでは，たとえ $u_{m\,n} \to A$ であっても A は $u_{m\,n}$ の二重極限ではない．

例えば，n をさきに $\to \infty$ としてから，後に $m \to \infty$ とした場合に

$$\lim_{n\to\infty} u_{m\,n} = v_m, \qquad \lim_{m\to\infty} v_m = B$$

が存在すれば，これを $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} u_{m\,n}$ または $\displaystyle\lim_m \lim_n u_{m\,n}$ で表し，B を $(u_{m\,n})$ の**行の累次極限**という．

m, n の順序を入れ替えた場合に

$$\lim_{m\to\infty} u_{m\,n} = w_n, \qquad \lim_{n\to\infty} w_n = C$$

が成立すれば，C を $(u_{m\,n})$ の**列の累次極限**という．

これを $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} u_{m\,n} = C$ または $\displaystyle\lim_n \lim_m u_{m\,n} = C$ で表す．

行および列の累次極限と二重極限

$$\lim_m \lim_n u_{m\,n} = B, \qquad \lim_n \lim_m u_{m\,n} = C, \qquad \lim_{m,n} u_{m\,n} = A$$

とは一般には別々であって，その内の一つが存在しても他が存在するとは限らない．

詳しくいえば，**累次極限 B, C が存在しても，$B = C$ とはいえないし，$B = C$ であっても二重極限が存在するといえない．また二重極限が存在しても，累次極限が存在するといえない．**

これは次の数例で説明される．

例 1.

$$u_{m\,n} = \frac{m-n}{m+n}.$$

$$\lim_m u_{m\,n} = 1, \qquad \lim_n \lim_m u_{m\,n} = 1 = C.$$

$$\lim_n u_{m\,n} = -1, \qquad \lim_m \lim_n u_{m\,n} = -1 = B.$$

しかるに N をいかに大にとるとも，

$m = n > N$ ならば，$u_{m\,n} = 0$; $m, n > N$, $m = 2n$ ならば $u_{m\,n} = \frac{1}{3}$.

故に $m, n > N$ のすべてに対し $|u_{m\,n} - A| < \varepsilon$ となるような A は存在し得ない．故に二重極限は存在しない．

例 2.

$$u_{m\,n} = \frac{mn}{m^2+n^2}.$$