

## まえがき

「これこそが統計学である」と言えるものはなにか？と問われると言葉に詰まる。統計学にはさまざまな分野・主義・思想があり、それぞれ独特の手法や文化、歴史と習慣があったりして千差万別なのだが、どれをとっても1つの「統計学」である。それらの多くは分野横断的でもあり、同じ統計学者同士であっても言葉が通じない場面が多々ある。しかし、あえて統計学の脊髄と言えるようなものはなにかと問われれば、それは「数理統計学」であろう。数学の言葉で普遍的に記述される美しい理論体系は、統計学全般の礎となり、この普遍性によって“統計科学”を科学たらしめている。

実務で統計手法を用いてみると、答えが明確に得られるわけではなく、意思決定するにも不安は消えず、なんだか曖昧な部分も多く、その科学的根拠を疑いたくなるかもしれない。ところが、数理統計学の世界に足を踏み入れれば、それは紛れもなく数学であり、現代確率論や解析学の道具がフル活用される土壌の1つになっていて、泥臭く思えた統計手法にも、実は数理に裏打ちされた正当性があるのだということに気づく。特に、標本数  $n$  を大きくしたときの“極限”を調べる「大標本理論」は多くの統計手法の基礎になっている。

現代確率論で著名な Gnedenko と Kolmogorov はその著書<sup>\*1</sup>の中で “*The epistemological value of probability theory is revealed only by limit theorems*” (確率論の認識論的価値は極限定理によってのみ明らかにされる) と述べている。確率率というものは、本来実在するかどうかわからない(ある意味哲学的な)存在に思えるが、中心極限定理などの“極限”を利用した計算の実用性を知って初めて「確率」というものの価値を認識するのである。ちなみに、統計学は実学的なものであるから、“極限”(limit)という現実には実現不可能な状態をタブー視して

---

<sup>\*1</sup> Gnedenko, B.V. and Kolmogorov, A.N. (1954). *Limit distributions for sums of independent random variables*, Addison-Wesley, Reading.

「漸近 (asymptotic)」という言葉で代用し、統計学を極限定理によって理解・説明しようとする理論を**統計的漸近理論** (asymptotic statistics) と呼ぶ。したがって、統計学の認識論的価値は漸近理論にあり！と思う今日このごろである。

統計的漸近理論は、標本数  $n$  を“限りなく”大きくしたとき (理想的な状況) に現れる漸近分布 (極限分布) を調べ、それを基に推定量の良さや、統計手法の正当性・最適性を数学的に論ずるなど、**統計学への漸近論的なアプローチ**であり、統計学を数学として理解したい人には実に面白い分野の1つである。一方で、漸近理論は統計学のオマケのように思っている人も少なからずいるだろう。漸近理論を知らなくても統計的手法を使うことはできるし、直感的な理解から統計手法を作ることもできる。しかし、膨大なデータが利用可能となった現代では、統計的漸近理論はもはや**統計リテラシー**の一部ではないかとも思うのである。自分が使う統計手法や推定量がどういう状況ならば正当性を持つのか、そういうことは解析者が知っていなければ、場合によっては統計的判断を誤るであろう。さまざまな統計ソフトや AI が利用可能となり、だれでも統計手法を実行できるようになった現代こそ「統計的漸近理論」は求められる知識であり、この極限という現実には到達し得ない境地は、未だ AI にも認識できない (であろう) 人類固有の叡智と言えるのではないか。少なくとも IID 下での漸近理論はそれらすべての源流であり、統計学を志すなら一度は学習すべきリテラシーであると筆者は信じている。

数年前に「統計学への確率論、その先へ」(清水<sup>[5]</sup>)を執筆した。その副題「ゼロからの測度論的理解と漸近理論への架け橋」にもあるように、その目標の1つは、初等統計をかじった大学2, 3年生が現代的な確率論を学び、そこから数理論計へ、特に統計的漸近理論へとつなげる最短経路を提示することであった。本書はその続編である。「統計学では測度論が必要だ」と先生や先輩から言われたり、SNS等で目にしたことがある人は多いだろう。ところが、一体どこで測度論を使っているのか？本当に必要なのか？と疑問に思っている人も多いのではないか。これから本書を読み進める読者はどんどん実感すると思うが、本書では、清水<sup>[5]</sup>の中のあらゆる定理や定義、例などを頻繁に引用していくので、漸近理論の“ほとんど至るところ”で測度論的な考え方・知識が必要であることを実感するだろう。しかも、本書を読み進める上で必要な知識は、上記1冊で必要十分である。

その意味では、「統計学への確率論」を読んだなら次は本書、というのが統計学徒の最も自然な流れであろう。

本書が目指した1つの特徴は、統計的漸近理論に関する論文の「読み・書き」ができるようになる書であり、まさにそのようなリテラシーと証明の技術を養うことが目的である。数理統計の論文の典型的な形は、統計的主張（ステートメント）を数学的に記述したあと、それを証明し、シミュレーションによって主張の正しさを例証するというものである。統計学を学習し始めた学生諸氏は、何をどう証明すればよいのか？シミュレーションでは何を見たり、見せればよいのか？など、最初のイメージがつかめず戸惑うことだろう。本書の1, 2章はそのような統計論文を読み書きする上でのリテラシーを述べている。

本書のもう1つの目的は、「確率過程の統計推測」へのいざないである。古典的にはIIDという条件下での統計学が主流であるが、ビッグデータの現代統計ではより複雑な従属関係にあるデータを扱うことが多いであろう。IIDの統計を従属データに自然に拡張していこうとすると、その分岐の1つが「確率過程」である。本書の第3章は、そのような確率過程の統計学にも応用可能な枠組みで理論を組み立てており、さらに第6章では、確率過程で本質的になるマルチンゲールに関する性質と統計学での役割について触れ、さらにその先へ進みたい方への動機づけを行っている。本書は「統計学、その先へ」である。確率論を一通り学ばれた読者には、ぜひ本書を手にとりいただき、現代統計におけるリテラシーを高めていただければ幸いである。

本書を書くにあたって、当時筆者研究室の学生であった高岡伸句、西脇優斗、飛田綾也の各氏には、初校を丁寧に読んでいただき、貴重なコメントをいただいた。また、中島翔平氏（早稲田大学助手）、小林光木氏（早稲田大学助手）、木村晃敏氏（早稲田大学講師）、寺田吉壱氏（大阪大学准教授）、荻原哲平氏（東京大学准教授）、白石博氏（慶応大学教授）（肩書はいずれも当時）には、統計学の専門家としての立場から、重要なご指摘を数多くいただき、原稿を大幅に改善することができた。ここに感謝を込めて、お名前を記させていただく。この他にも、当時の研究室の学生諸氏から、本原稿を使ったゼミを通じて多くの誤植の修正やコメントをいただいた。感謝申し上げたい。

さて、本書のイメージとして掲げられた力強い書「極限」。これは全長150cm

ほどもある縦長の書で、その撮影は実はかなりの難題であったのだが、拙研の小林光木氏が考えうる最大限の技術的工夫を凝らし、見事にその全体像を写真におさめてくれた。併せてここに感謝申し上げる。

この極上の書をご提供くださった稲葉青寿氏は、私の故郷・福井在住の老熟の書家である。しかしながらその筆致は若々しく、瑞々しさの中にも緊張感が漂い、見る者を奮い立たせる気迫が感じられる。一方、性格は気さくで、話好きなおばさんであり、ずいぶんと親しみやすい方であった。稲葉氏は本書の完成を心待ちにしてくださっていた。ところが、執筆も佳境に入った頃、氏は病に伏し、闘病生活を送ることとなる。そして本書完成の直前、まさにこれから出版のための印刷に入ろうとしていた矢先に、急逝の報を受けた。この「極限」の書は、悔しくも氏の遺作となってしまった。直接手渡しできなかったのは残念でならないが…稲葉寿子氏に、感謝と畏敬の念を込めてこの本を捧げたい。

最後に、前著書「統計学への確率論、その先へ」の執筆から今回の出版に至るまで、さまざまな形での動機付けに加えて、常に励ましをいただいた内田老鶴圃の内田学氏を初め、細部に渡って碎心してくださったスタッフの方々には心から感謝申し上げます。

2023年11月

清水 泰隆