はしがき

本書は，温故知新の教えのもとで，様々な古典的不等式（ハーディ不等式，ソボレフ不等式，レリッヒ不等式，加藤の不等式，等周不等式，CKN 型不等式，$\cdots$）を訪ね，それらの新しい発展に気軽に触れるための解説書です．本書を楽しむための必要条件は [数学の愛好家] であるということだけです．理工系の学生や研究者でなくても数学や不等式に関心があれば，どなたでも本書を色々なレベルで楽しめるよう工夫されています．例えば専門性が「ちょっと高いかも」と思われる箇所には [スキップ] が用意されていますから，必要になるまで読み飛ばすこともできます．また，掲載する価値はあるが「ちょっと手強いかも」と思われる内容は [付録] に適宜まとめてあります．もちろん予備知識が多い方が速く読み進められますが，ゆっくり楽しく本書を味わうため [*Fika*]（フィーキャ）という仕掛けが随所にされています．また，取り扱われる多くの不等式たちは互いに関連を持ちつつもそれぞれ独立した存在ですから，興味のあるトピックスを辿って進むこともできます．

本書の基本構想は，**第 I 部**で有名なハーディ不等式を皮切りに，1 次元の古典的不等式から始めて美しい古典的不等式たちに触れる．**第 II 部**でそれらの精密化の萌芽を辿り，**第 III–V 部**でそれらが生き生きと発展していく様子を垣間見，**第 VI 部**で皆さんに最近の話題を気楽に楽しんでいただくという些か壮大なものでした．

しかしながら無数にある素晴らしい不等式たちを漏れなく取り扱うことなど筆者には到底無理だと悟り，手前味噌ではありますが，[第 III 部以降では] 自身の専門である偏微分方程式の探求で自然に発見したり，必要に迫られ精密化したり，時には趣味を兼ねて改良した不等式たちを中心に紹介させていただきます．そのような理由で以下に筆者と古典的不等式との交わりを少し述べます．

数学を学んでいくうちに様々な不等式に出会ってきましたが，京都大学の理学部数学科 4 年の頃（指導教員は溝畑茂先生）に，ソボレフの不等式に遭遇しました．そのときの印象は，ソボレフ指数やソボレフ最良定数が厳密に与えられていて，自然で改良の余地が全くないということでした．しかし，III–2 [*Fika*] にも書きましたが，6 年後のスウェーデン留学中に V. G. Maz'ya の分厚い新刊にインスパイアされ，ともかく重み付きソボレフ不等式に拡張することができました．この成功体験もあり，偏微分方程式の研究の傍ら「古典的不等式の精密化」はライフワークの 1 つになりました．

例えば，楕円型方程式の解の爆発現象がハーディ型不等式と深く関わることを知り，それを良く理解するためにハーディ型不等式の精密化を試みました．その結果，多くのハーディ型不等式がミッシング・タームを持つことを知りました．また，P. L. Lions による変分問題における極値関数の存在性の研究（Concentration-Compactness 原理）を受けて，CKN 型不等式（第 12 章）の最良定数を決定する問題に興味が湧き，臨界の場合を含む CKN 型不等式の精密化につながりました．これは，P. L. Lions のフィールズ賞受賞（1994 年の ICM）につながった前出の仕事から 15 年後のことでした．また最近では，無限次退化をする楕円型偏微分作用素の性質を理解したくて，道具として必要なノンダブリングな重み付きハーディ不等式の開発を始めました．そして運良く臨界・非臨界を同時に取り扱えるようなハーディ型不等式と CKN 型不等式の新しい枠組みが構成できました．本当に，必要は [不等式の精密化] の母ですね．

本書に出逢った皆さんが，心に強く残っている古典的不等式に再会を果たし，その結果，古典的不等式に対して新たな興味を持っていただけたら幸いです．そして今後も皆さんと一緒に，このような体験を積み重ねることができたらと考えています．

最後になりましたが，本書の執筆は内田老鶴圃社長の内田学氏のお勧めによるものであり，同氏には貴重な助言と絶え間ない励ましを，また同社編集部の皆様には [$Fika$] や [スキップ] など本書に親しみ深い表情を与えていただきました．ここに記して深く感謝する次第です．

2023 年 3 月

堀内 利郎

水戸 にて

本書の構成について

本書の構成をもう少し具体的にお話します.

第 I 部;古典的不等式への誘いでは,[第 1 章] でハーディ不等式の歴史的登場から始め,1 次元の古典的不等式たちが重み付きハーディ・ソボレフの不等式,CKN 型不等式へと自然に発展していく様子を振り返ります.続いて [第 2 章] では,美しい数学遺産とでもいうべき古典的不等式の数々を紹介します.それらは,高次元ハーディ不等式,ソボレフ不等式,臨界と非臨界の重み付きソボレフ不等式,等周不等式,レリッヒ不等式,加藤の不等式の順に登場します.また本書を楽しむための基本的なツールとして,超関数理論の簡潔な導入に加え,最後にヘルダーとミンコフスキー不等式も簡単に懐古します.

第 II 部;古典的不等式の精密化に向けてでは,後に古典的不等式たちを精密化するために援用されるアイディアにあらかじめ触れるため,片側境界条件のハーディ不等式,ソボレフ不等式と等周不等式の同値性,ポワンカレ型不等式と球内の等周不等式,集合と関数の再構成,古典的不等式のミッシング・タームの存在証明などを順に鑑賞していきます.またソボレフの不等式の厳密な証明も,$p = 1$,$p > 1$ の順に与えられます.

第 III 部;等周不等式による古典的不等式の精密化では,与えられた様々な閉集合 F からの距離の冪を重み関数とする重み付きソボレフ不等式が紹介されます.例えば F がカントール集合やフラクタルだったら何が起こるでしょうか? キーワードはソボレフ不等式と等周不等式の同値性です.

第 IV 部;ミッシング・タームの発見による精密化では,ハーディ不等式とレリッヒ不等式が精密化されます.これらは共に臨界と非臨界の場合を持つという意味で非常に興味深く,精密化された不等式の応用として,関連する変分問題も解説されます.ミッシング・タームがすべて見つかれば不等式は等式になるのでしょうか?

第 V 部;CKN 型不等式の新しい定式化による精密化では,[第 12 章] において最良定数や極値関数の存在・非存在等が詳しく調べられます.不等式の記述を単純化するため,1 つのパラメーター $\gamma \in \mathbf{R}$ に集約する新しい定式化が採用されます.[第 13 章] において,$p = 1$ の場合の CKN 型不等式が [対称性の破れ] を含め詳しく考察されます.

最後に**第 VI 部;無限次の爆発や退化を許容する重みの導入による精密化**では,文字通り無限次の爆発や消滅をする可能性がある [ノンダブリングな重み](定義 14.1.1 と直後の解説を参照)の場合に,[第 15 章] で境界型の高次元ハーディ不等式と [第 16, 17 章] で CKN 型不等式が臨界と非臨界を統一する形で取り扱われます.

本書の読み方について

最初に [$Fika$] を定義します.

スウェーデンではコーヒーブレイクのことを [$Fika$](フィーキャ) といいます.

この言葉の由来はスウェーデン語のコーヒー [$Kaffe$] を逆にしたものです．スウェーデンは，ヨーロッパでコーヒーの消費量が最も高い国の 1 つで，この [$Fika$] という習慣は，もはや国民的行事とも言えます．[$Fika$] ではコーヒーと共に甘いケーキやお菓子を食べるのが一般的ですが，大学や研究所ではセミナーの直前や中休みに，一般の職場では午前 10 時頃に [$Fika$] が設定されていることが多いようです．ちなみに本書でも [$Fika$]（目次および第 I–VI 部の中扉 [$Fika$] リスト参照）が随所に設定されています．リラックスするためだけでなく親睦 (?) の意味もあるので，機会があったらぜひ参加して見てください.

はしがきの中でも述べましたように，本書は色々な古典的不等式に触れ，それらの精密化を必要に応じて楽しむことを目的としています．その一方で，初学者や専門が異なる方々には少し馴染みにくい内容も含まれますから，読み進む上での指針を以下にあげておきます.

1. 本書は第 I–VI 部からなり，各部はいくつかの章からなり（全 17 章），さらに各章はいくつかの節からなっています．定理，定義や式などの番号は，各節ごとの通し番号になっています.
2. 補足と注意にも通し番号がついています．補足は少し高度な内容が含まれることもありますが，基本的には定理等の理解を補うことが目的です.
3. 本書では，やや専門的な内容を含む証明や少し馴染みにくいトピックスが付録として掲載されています．自己完結と読者の好奇心を刺激することが目的ですから，最初はどんどん読み飛ばしてもかまいません.
4. 基本的に各章は独立していますから，必ずしも順に読み進む必要はありません．ハーディ不等式の章ばかりを選んで読み進めたり，ソボレフの不等式の部分に特化したり，あるいはトピックス [例えば，等周不等式とソボレフの不等式の関係，関数の球対称減少再構成，ミッシング・タームの存在] を選んで読むことも可能です.
5. [$Fika$] は本文と連動している場合がありますが，基本的には独立しています.